Optimization Technique for Optimal Separation:

ทฤษฎีของ Optimal separation เรารู้ว่า $\exists!\, z^* \in C = \operatorname{conv}(X_+ - X_-)$
ที่ซึ่ง
$$\|z^*\| = \min_{z \in C} \|z\| = \operatorname{dist}(C_+, C_-)$$

$$C_\pm = \operatorname{conv}(X_\pm), \quad C_+ \cap C_- = \phi.$$

$$(\text{เพราะ } 0 \in C = \operatorname{conv}(X_+ - X_-))$$

วิธีแรก: Line search algorithm:

พิจารณาเซตของจุดขอบ $\operatorname{ext}(C)$, $C = \operatorname{conv}(X_+ - X_-)$.

เลือกเซต $E \subset C$ ที่ $\operatorname{ext}(C) \subset E$.

$$X_+ - X_- = \{a - b \mid a \in X_+, b \in X_-\}$$

ให้ $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_M\}$,

หาค่าของ z^* โดยกระบวนการทำซ้ำ ดังนี้.

ขั้น0: เลือก $\xi(0) := \xi(0,0) \in E$ และให้ $k = 0$, $\delta > 0$ มีค่าน้อยๆ.

ขั้น1: ให้ $j = 1, \ldots, M$, $z_j \in E$.

minimize $\|t z_j + (1-t)\xi(k, j-1)\|$ สำหรับ $t \in [0,1]$

ถ้าให้ t° ที่ให้ค่า minimum แล้ว ให้

$$\xi(k, j) := t^\circ z_j + (1 - t^\circ)\xi(k, j-1).$$

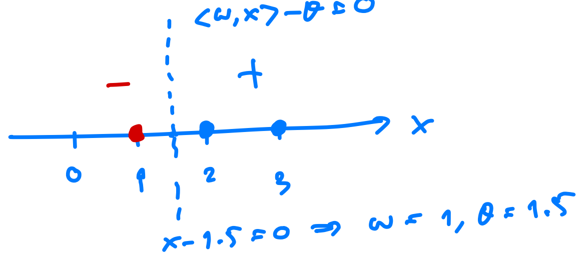
จะได้ $\xi(k,1), \xi(k,2), \ldots, \xi(k,M)$

S2: set $\xi(k+1) := \xi(k+1, 0) = \xi(k, M)$

If $\| \xi(k+1) - \xi(k) \| < \delta$ stop.

Else $k = k+1$ Goto S1.

Ex: Line Search algorithm:



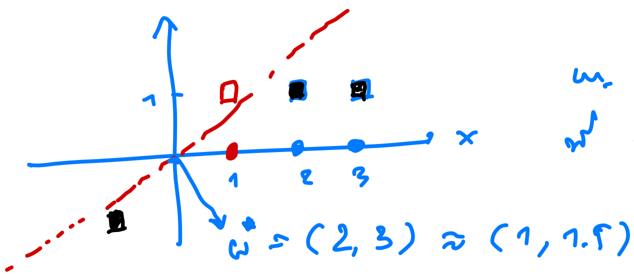
$X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

$X_+ = \{2, 3\}$, $X_- = \{1\}$

PL: say. $\hat{X}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\hat{X}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\hat{X} = \hat{X}_+ \cup \{ -\hat{x} : \hat{x} \in \hat{X}_- \} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

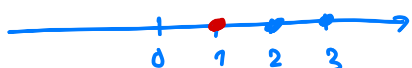
$\hat{X} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$



w. $w^* = (w, \theta)$

w. $w^* \hat{x}_i > 0 \quad \forall \hat{x}_i \in \hat{X}$

Line search: $X = \{1, 2, 3\}$



$X_+ = \{2, 3\}$, $X_- = \{1\}$

จะได้. $X_+ - X_- = \{a-b \mid a \in X_+, b \in X_-\}$

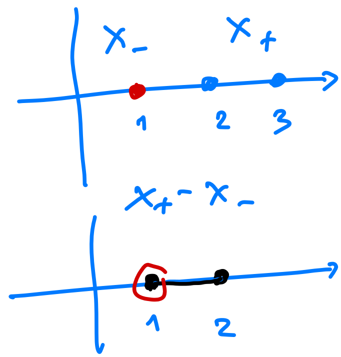
$$= \{2-1, 3-1\} = \{1, 2\}$$

เลือก $E = X_+ - X_- = \{1,2\}$, $C = \text{conv}(X_+ - X_-)$.

จะเห็นได้ว่า $\text{ext}(C) = \{1,2\} = E$.

รอบ 0: เลือก $\xi(0) = \xi(0,0) = 2 \in E$, $k = 0$, $\delta = 10^{-5}$

ที่ $k=0$: $E = \{z_1, z_2\} = \{1, 2\}$.



ขั้น 1: วนรอบ $j = 1$: $z_1 = 1$

หา t^* ที่ minimize.

$$\| t z_1 + (1-t)\xi(0,0) \|$$

จะได้ $t^* = 1$.

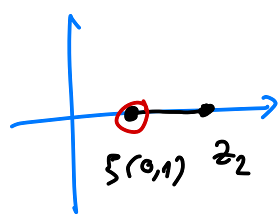
ดังนั้น $\xi(0,1) = 1 z_1 + (1-t)\xi(0,0)$

$$= 1(1) + (1-1)(2) = 1.$$

→ วนรอบ $j = 2$: $z_2 = 2$.

หา t^* ที่จะ minimize ของ

$$\| t z_2 + (1-t)\xi(0,1) \|$$



จะได้ $t^* = 0$

ดังนั้น $\xi(0,2) = 0 z_2 + (1-0)\xi(0,1)$
$$= 0(2) + (1)(1) = 1.$$

S2: ให้ $\xi(k+1) = \xi(k+1,0) = \xi(k,M)$
$(k=0)$

$\xi(1) = \xi(0+1) = \xi(0+1,0) = \xi(0,2) = 1$

จะได้ $\xi(1) = \xi(1,0) = 1.$

check: $\|\xi(1) - \xi(0)\| = \|1-2\| = 1 \not< \delta = 10^{-5}$

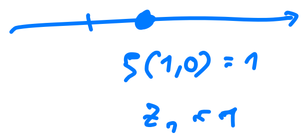
ให้ $k = k+1$, Goto S1:

$\Rightarrow$ I2: $(k=1)$ $\quad G = \{z_1, z_2\} = \{1, 2\}.$

S1: $\rightarrow$ เริ่ม $j=1$: $z_1 = 1$, $\xi(1,0) = 1$

หา t^* ที่ทำให้ minimize

$$\| t z_1 + (1-t)\xi(1,0)\|$$



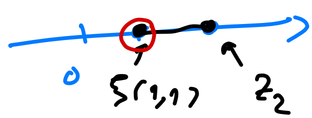
$t^* = \frac{1}{2}.$

จะได้ $\xi(1,1) = \frac{1}{2}(1) + (1-\frac{1}{2})(1) = 1.$

$\Rightarrow$ ต่อ $\underline{j=2}$: $z_2 = 2$, $\xi(1,1) = 1$

หา t^* ที่ทำให้ minimize

$$\| t \overset{2}{z_2} + (1-t)\overset{1}{\xi(1,1)}\|$$



จะได้ $t^* = 0$

จะได้ $\xi(1,2) = 0 \cdot 1 + (1-0)(1) = 1.$

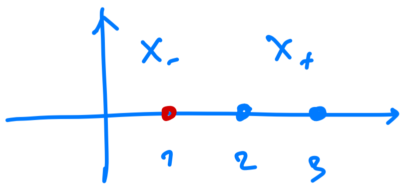
ξ2: ให้ $\xi(k+1) = \xi(k+1,0) = \xi(k,M)$
$(k=1)$

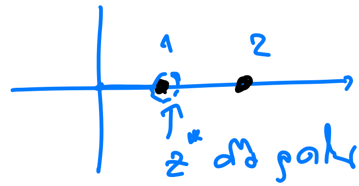
$\Rightarrow \xi(2) = \xi(2,0) = \xi(1,2) = 1.$

check $\|\xi(2) - \xi(1)\| = \|1-1\| = 0 < \delta = 10^{-r}$ ✓

STOP $\Rightarrow$ $\boxed{z^* = 1.}$ $\Rightarrow$ ได้ ω, $\theta_\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(C,0)$

$= \frac{1}{2}\|z^*\| = \frac{1}{2}$



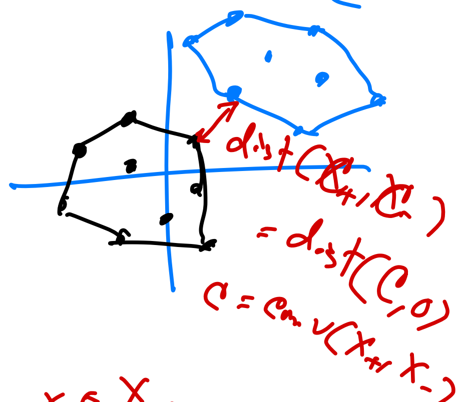


$C =$

z^* คือ จุด ใน $\mathrm{conv}(X_+ - X_-)$

ที่ ทำให้ $\|z^*\| = \min_{z \in C} \|z\|$

$\Rightarrow$ ระนาบ. ω^* อย่างไร.



$z^* = a - b$, (และ $a \in X_+$
$b \in X_-$

$X_+ = \{\underline{2}, 3\}$, $X_- = \{\underline{1}\}$
x

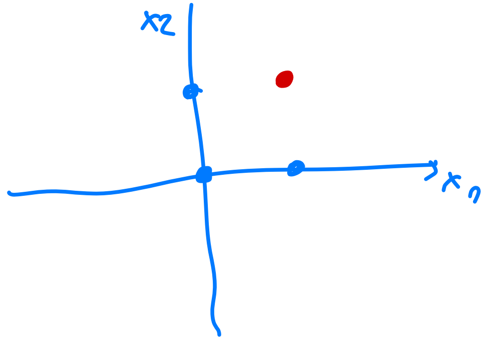
$z^* = z_1 = \underline{\underline{2-1}} \rightarrow x - 1$, $x \in X_+$

$h(x) = \underbrace{(x-1)}_{z^0} - 0.5 \Rightarrow \underline{\underline{x - 1.5}}.$

$z^0 - \theta_\omega$

สรุปผล: ได้หา z^* ด้วย AND operator. โดยใช้ Line search alg.

x_1	x_2	$AND(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



บทตั้ง: ให้ $(\xi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่เกิดจาก ข0-ข2 ของ line search algorithm แล้ว

$$\|\xi(k+1)\| \leq \|\xi(k)\|$$

และ ถ้า $\|\xi(k+1)\| = \|\xi(k)\|$ แล้วจะได้ว่า

$\xi(k) = z^*$ ที่ซึ่ง $\|z^*\| = \min\limits_{z \in C} \|z\|$, $C = \mathrm{conv}(X_+ - X_-)$

พิสูจน์: จากเกณฑ์ในขั้น ข1: จะได้

$$\|\xi(k,j)\| = \min_{t \in [0,1]} \|t z_j + (1-t)\xi(k, j-1)\|$$

$$\leq \min_{t \in [0,1]} |t| \|z_j\| + |1-t| \|\xi(k, j-1)\|$$

$$\leq \|\xi(k, j-1)\|$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\|\xi(k+1)\| = \|\xi(k, m)\| \leq \|\xi(k, m-1)\| \leq \cdots \leq \|\xi(k, 0)\|$$
$$= \|\xi(k)\|$$

ดังนั้น. $\quad \|\xi(k+1)\| \leq \|\xi(k)\|$

สมมติว่า $\quad \|\xi(k+1)\| = \|\xi(k)\|$ จะได้ว่า.

$$\min_{t\in[0,1]} \|t z_j + (1-t)\xi(k,j-1)\| = \|\xi(k,j-1)\|$$

จะได้ ว่า t^* ที่ทำให้ค่าน้อยสุด เป็น $t^* = 0$.

ดังนั้น $\quad \xi(k,j) = \xi(k,j-1)$.

นั่นคือ. $\quad \xi(k+1) = \xi(k,M) = \dots = \xi(k,0) = \xi(k)!$

นั่นคือ.

$$\|\xi(k)\| = \min_{t\in[0,1]} \|t z_j + (1-t)\xi(k)\|$$

ดังนั้นจะได้

$$\|\underline{\xi(k)}\|^2 \leq \|t z_j + (1-t)\xi(k)\|^2$$

$\langle t(z_j-\xi(k)), \xi(k)\rangle^2$

$$= \|\xi(k) + t(z_j - \xi(k))\|^2$$

$$= \overbrace{t^2\|z_j - \xi(k)\|^2}^{>0} + 2t\langle z_j - \xi(k), \xi(k)\rangle + \underline{\|\xi(k)\|^2}.$$

จะได้.

$$0 \leq \underbrace{t^2\|z_j - \xi(k)\|^2}_{>0} + 2t\langle z - \xi(k), \xi(k)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle z_j - \xi(k), \xi(k)\rangle = \langle z_j, \xi(k)\rangle - \langle \xi(k), \xi(k)\rangle$$

สำหรับ $j = 1, \dots, M$ ดังนั้น

$$\langle z_j, \xi(k)\rangle \geq \langle \xi(k), \xi(k)\rangle.$$

และข้างต้นเป็นจริงด้วยสำหรับ $z \in C = \text{conv}\{z_1, \dots, z_M\}$

ดังนั้น $\|z\|\cancel{\|\xi(k)\|} \geq \|\xi(k)\|\cancel{\|\xi(k)\|}$

$\Rightarrow \|z\| \geq \|\xi(k)\|$ สำหรับทุก $z \in C$.

ดังนั้นจะได้ว่า $\|\xi(k)\| = \min_{z \in C} \|z\|$ นั่นคือ $\xi(k) = z^*$ ∎

ทบ: ถ้าเริ่มจากค่าเริ่มต้น $\xi(0) \in C$ ใดๆ จะได้ค่า ξ ล่าสุดที่เกิดจาก S0 - S2 ของ line search algorithm จะลู่เข้าสู่ z^*