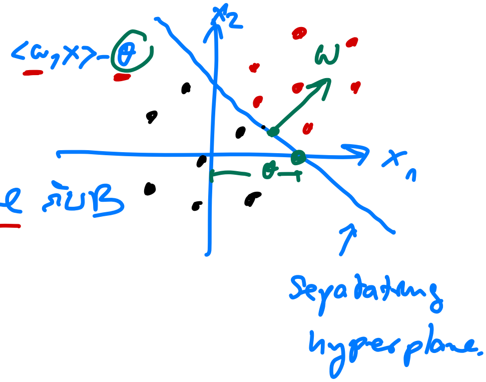
⇒ Affine Separation.



Def: เซต $A, B \subset \mathbb{R}^n$

จะเรียกว่า A เป็น affinely separable กับ B

ถ้ามี $(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{w}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\theta}}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ที่ซึ่ง

$$\langle w,x\rangle - \theta \begin{cases} \geq 0 & \forall x \in A \\ < 0 & \forall x \in B \end{cases}$$

และจะเรียก $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w,x\rangle = \theta\}$ ว่า

separating hyperplane. (เส้นใน 2D, ระนาบใน 3D.)

ถ้ากรณีที่ $\forall x \in A$ แล้ว $\langle w,x\rangle - \theta > 0$ แล้วจะเรียกว่า

strictly affinely separable.

สำหรับกรณีที่ $\theta = 0$ จะเรียก A ว่าเป็น linearly separable จาก B.

และ strictly linearly separable สำหรับกรณี $\langle w,x\rangle > 0$ $\forall x \in A$.

ความเกี่ยวข้องระหว่าง perceptron (McCulloch-Pitts neurons)

และสมบัติ affinely separable จะสามารถแสดงได้ด้วยทฤษฎีบท.

ทบ 1: ให้เซต $X \subset \mathbb{R}^n$ และฟังก์ชัน $f: X \to \{0,1\}$

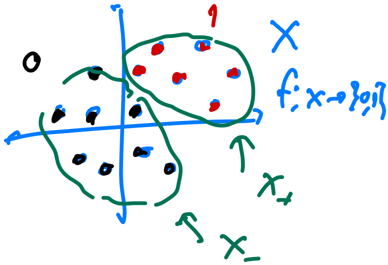
สามารถเขียนได้ในรูปของ perceptron ก็ต่อเมื่อ

X_+ เป็น affinely separable จาก X_- โดยที่ให้

$X_+ := f^{-1}(1) \subset X$ และ

$X_- := f^{-1}(0) \subset X$

Proof: จาก



$$f(x) = H(\langle w,x\rangle-\theta) = \begin{cases}1, & \langle w,x\rangle-\theta\ge 0\\ 0, & \langle w,x\rangle-\theta<0\end{cases}$$

สำหรับบางค่า $(w,\theta)\in\mathbb{R}^{n+1}$ ก็ต่อเมื่อ

$$\langle w,x\rangle-\theta \begin{cases}\ge 0, & x\in X_+\\ <0, & x\in X_-\end{cases}$$

ตามต้องการ ∎

ดังนั้น ปัญหาในขั้นตอนนี้คือ จะรู้ได้อย่างไรว่า X_+ และ X_- เป็น affinely separable

เราจะใช้ความรู้เกี่ยวกับ convex set มาช่วยอธิบาย.

Def: ให้ $A\subset\mathbb{R}^n$ จะเรียกเซต A ว่า convex set ถ้า สำหรับจุด $x, y\in A$ แล้ว เส้นเชื่อมระหว่าง x, y จะอยู่ใน A ด้วย นั่นคือ

ถ้า $x,y\in A$ และ $0\le\lambda\le 1$

แล้ว $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$ ∎

โดยทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการแบ่ง convex sets คือ

Thm: ให้ $A, B\subset\mathbb{R}^n$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็น convex set ที่ไม่เหมือนกัน

นั่นคือ $A\cap B=\emptyset$ แล้ว.

1.) ถ้า B เป็นเซตเปิด (open set) แล้ว A จะเป็น affinely separable กับ B

Ex: $(0,1)$

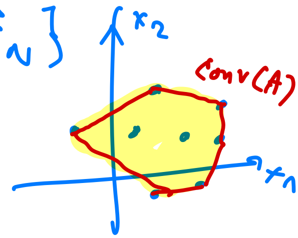
2.) ถ้า B เป็นเซตปิด (closed set) และ A เป็น compact set (closed & bound

Ex: $[0,1]$ compact ใน $\mathbb{R}^n$)

แล้ว จะเป็น strictly affinely separable.

$[0,\infty)$ closed ไม่ compact.

ปัญหา ถ้าเซ็ต $A \subset \mathbb{R}^n$ (อะไรก็ได้แล้วไม่เป็น convex set) เช่น finite set. Ex: $A = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ดังนั้นเราจะพิจารณา covex hull ของ A แทน.

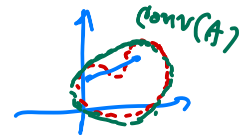


Def: ให้ $A \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตใดๆ แล้ว convex hull ของ A หรือเขียนแทนด้วย conv(A) คือ intersection set ของทุก convex subsets ของ $\mathbb{R}^n$ ที่บรรจุ A (convex set ที่เล็กที่สุดที่บรรจุ A) สามารถเขียนได้ในรูป

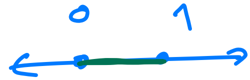
$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

สมบัติของ convex hull:

1.) ถ้า A เป็น open set แล้ว
$\text{conv}(A)$ เป็น open set ด้วย.



2.) ถ้า A เป็น compact set แล้ว
$\text{conv}(A)$ เป็น compact set ด้วย.

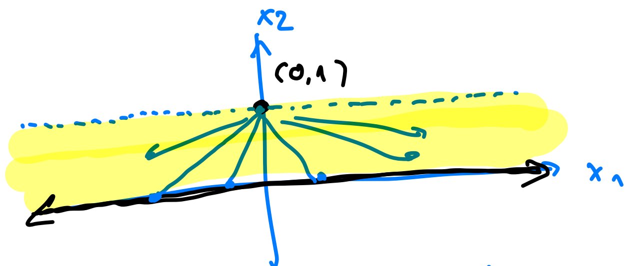


$A = \{0,1\}$
$\text{conv}(A) = [0,1]$

3.) ถ้า A เป็น closed set แล้ว
$\text{conv}(A)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น closed set

Ex: $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

จะได้ $\text{conv}(A) = \{(x,y) : 0 \le y < 1\} \cup \{(0,1)\}$
ไม่เป็น closed set



จากไอเดียของ convex hull เราสามารถขยายทฤษฎีบท
สำหรับการแบ่งแยก affinely separable ของ convex sets
ได้ดังนี้

<u>ทบ:</u> ให้ $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ไม่เป็นเซตว่าง แล้ว.

1.) ถ้า B เป็น open set แล้ว
A จะเป็น affinely separable กับ B ก็ต่อเมื่อ

$\mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B) = \phi$.

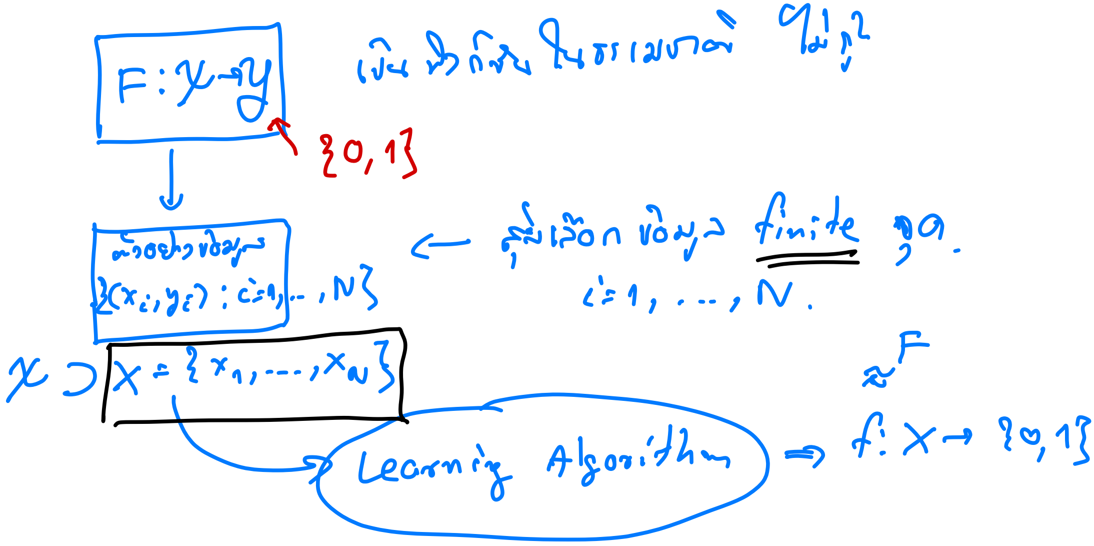
convex   open.

2.7 ถ้า B เป็น closed set และ A เป็น compact set แล้ว A จะเป็น strictly affinely separable ด้วย B ก็ต่อเมื่อ

$$\underbrace{\mathrm{conv}(A)}_{\text{compact}} \cap \underbrace{\overline{\mathrm{conv}(B)}}_{\text{closed.}} = \phi$$

โดยที่ $\overline{\mathrm{conv}(B)}$ คือ closure ของ $\mathrm{conv}(B)$

ระบบ Learning System:



$\Rightarrow$ Separation of finite sets:

สมบัติของ finite set $A \subset \mathbb{R}^n$:

จะได้ว่า A เป็น compact set (closed + bound.)

ดังนั้น $\mathrm{conv}(A)$ เป็น compact set.

จาก ทบ. การแบ่งเป็น affinely separable จะได้ว่า.

ให้ A, B เป็นเซตจำกัด ใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว.

A จะเป็น (strictly) affinely separable กับ B ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B) = \emptyset.$$

รองรับ การคำนวณต่อไป จาก Boolean set $\{0,1\} \xRightarrow{\text{เปลี่ยน}} \{-1,1\}$

เนื่องจาก เราจะพิจารณาฟังก์ชัน $f: X \to \{\pm 1\}$ แทน.

โดยที่ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n$ และให้
(finite set)

$$X_+ := f^{-1}(1)$$
$$X_- := f^{-1}(-1).$$

ถ้า X_+ และ X_- ไม่เป็นเซตว่าง จะได้ว่า

X_+ และ X_- เป็น (strictly) affinely separable เมื่อมี $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ ที่

$$f(x_i) = \begin{cases} +1, & \langle \omega, x_i \rangle - \theta > 0, \quad x_i \in X_+ \\ -1, & \langle \omega, x_i \rangle - \theta < 0, \quad x_i \in X_- \end{cases}$$

และจะได้ว่า

$$\underbrace{f(x_i)}_{\text{sign}(\langle w,x_i\rangle-\theta)}\cdot\left(\langle w,x_i\rangle-\theta\right) > 0 \qquad \forall i=1,\dots,N$$

ดังนั้น ในการเรียนรู้แบบ perceptron
ความหมายอีกอย่างหนึ่ง การแบ่งแบบ affinely separable ของ X_+ และ X_-

---

มีความรู้เพิ่มเติมที่เป็นประโยชน์ของ convex hull ดังต่อไปนี้
ถ้า $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ให้

$$A-B := \{a-b : a\in A,\ b\in B\} \text{ แล้ว}$$
(ลบกันแบบเวกเตอร์)

$$\mathrm{conv}(A-B) = \mathrm{conv}(A)-\mathrm{conv}(B)$$

ดังนั้น สำหรับ finite set X_+ และ X_- จะได้ว่า

ทบ: X_+ และ X_- จะเป็น affinely separable ก็ต่อเมื่อ

$$0 \notin C := \mathrm{conv}(X_+ - X_-)$$

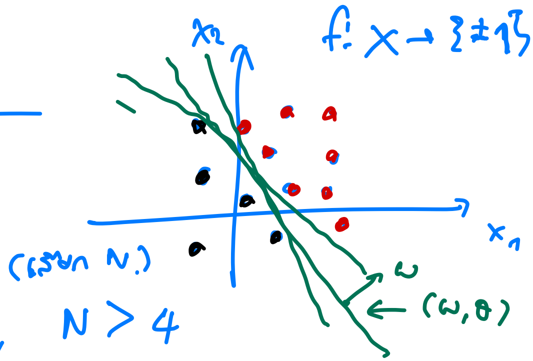
proof: จาก $\mathrm{conv}(X_+ - X_-) = \mathrm{conv}(X_+) - \mathrm{conv}(X_-)$
ดังนั้น ถ้า $0 \notin C = \mathrm{conv}(X_+ - X_-)$ แล้ว จะไม่มี $x\in\mathbb{R}^n$
ที่ $x \in \mathrm{conv}(X_+)$ และ $x \in \mathrm{conv}(X_-)$ พร้อมกัน.
ดังนั้น $\mathrm{conv}(X_+) \cap \mathrm{conv}(X_-) = \emptyset$. ☒

อีกทางหนึ่ง: เราสามารถแสดงได้ว่า

X_+ และ X_- เป็น affinely separable ก็ต่อเมื่อ weight polyhedron

$$\Gamma := \{ (\underset{\in \mathbb{R}^n}{w}, \underset{\in \mathbb{R}}{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x_i)(\langle w, x_i \rangle - \theta) > 0 \text{ ทุก } i = 1, \dots, N \}$$

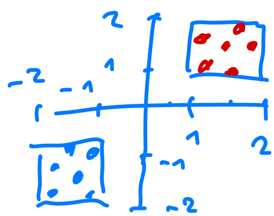
ไม่เป็นเซตว่าง. ☒



การบ้าน:

1.) ให้ยกตัวอย่างเซต. $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^4$, $N > 4$ และสร้าง $f: X \to \{\pm 1\}$ ที่สามารถเขียนในรูป perceptron ได้.
(ส. 10 ม.ค. 63)

2.) Python ให้เขียนโปรแกรม ตรวจสอบ เซตจำกัด A, B ใน 2D, $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ว่าเป็น affinely separable หรือไม่. ☒



(อังคาร. 14 ม.ค. 63)