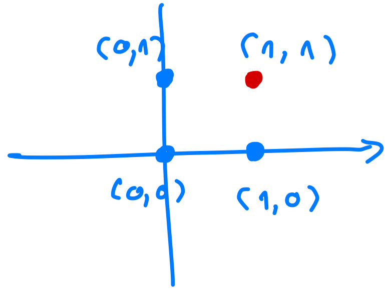
เฉลยการบ้าน:

$\boxed{\text{HW4:}}$ จงหา z^* สำหรับ AND Operator โดยใช้ Line search algorithm.

AND. (ปรับจาก $0 \to -1$)

$x_1 = (0,0)$	$y_1 = -1$
$x_2 = (0,1)$	$y_2 = -1$
$x_3 = (1,0)$	$y_3 = -1$
$x_4 = (1,1)$	$y_4 = 1$



จะเห็นได้ว่า $X_+ = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$

$$X_- = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

สร้างเซต $X_+ - X_- = \{ a-b \mid a \in X_+, b \in X_- \}$

$$= \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{z_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{z_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{z_3} \}$$

จะเห็นได้ว่า จุดยอด ของ $C = conv(X_+ - X_-)$ เป็น

$$ext(C) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

ใช้ $E = \{z_1, z_2, z_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \supseteq ext(C)$

สำหรับ Line search algorithm เราจะเริ่มจากที่

$S0$: $k = 0$, $\delta = 10^{-5}$, $\xi(0) = \xi(0,0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in E$.

ดังนั้น.

→ ที่ $\boxed{k=0}$:

ขั้น 1: สำหรับ $j = 1, 2, 3$

→ ที่ $j=1$: $z_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\xi(0,0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ หา t^* ที่

minimize $\|tz_1 + (1-t)\xi(0,0)\|$ สำหรับ $t \in [0,1]$.

พิจารณา $\left\|t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}t+1-t\\t+1-t\end{pmatrix}\right\|$

$$= \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$$

เป็นค่าคงที่ → t^* เป็นค่าใดๆ ที่ $t^* \in [0,1]$

ดังนั้น $\xi(0,1) = t^*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (1-t^*)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

→ ที่ $j=2$: $z_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\xi(0,1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ หา t^* ที่.

minimize $\|tz_2 + (1-t)\xi(0,1)\|$ สำหรับ $t \in [0,1]$.

พิจารณา $\left\|t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}t+(1-t)\\0-(1-t)\end{pmatrix}\right\|$

$$= \left\|\begin{pmatrix}1\\t-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+(t-1)^2}$$

หาค่าน้อยสุด โดยพิจารณาอนุพันธ์.

$$\frac{d}{dt}\left(1+(t-1)^2\right) = 2(t-1) = 0 \Rightarrow t=1$$

ดังนั้น $t^* = 1$

ดังนั้น $\xi(0,2) = t^*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (1-t^*)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

→ ที่ $j=3$: $z_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\xi(0,2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ หา t^* ที่

minimize $\| t z_3 + (1-t)\xi(0,2)\|$ สำหรับ $t \in [0,1]$

พิจารณา $\left\| t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1-t\\t\end{pmatrix}\right\|$

$$= \sqrt{(1-t)^2+t^2}$$

หาค่าน้อยสุด โดยพิจารณาจุดวิกฤต.

$$\frac{d}{dt}\left((1-t)^2+t^2\right) = 2(1-t)(-1) + 2t$$

$$= 4t-2 = 0$$

ได้ว่า $t = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $t^* = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\xi(0,3) = t^*\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (1-t^*)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

<u>S2</u>: ได้ $\xi(1) = \xi(1,0) = \xi(0,3) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

พิจารณา $\|\xi(1) - \xi(0)\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\| > \delta$

ดังนั้น ได้ $k = 2$ → GOTO S1.

⇒ ที่ $\boxed{k=2}$:

ข้อ1 : สำหรับ $j = 1, 2, 3$

ที่ $j=1$: $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi(1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ หา t^* ที่

minimize $\| t z_1 + (1-t)\xi(1,0) \|$ สำหรับ $t \in [0,1]$

พิจารณา $\left\| t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\|$

$$= \left\| \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}(1-t) \\ t + \frac{1}{2}(1-t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(t+1)^2 + (t+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(t+1)^2}$$

หาค่าน้อยสุด โดยพิจารณา.

$$\frac{d}{dt}\left(2(t+1)^2\right) = 4(t+1) = 0$$

จะได้ $t = -\frac{1}{4}$

จะเห็นได้ว่า จุดวิกฤต $t = -\frac{1}{4} \notin [0,1]$

ดังนั้น ค่าน้อยสุดอยู่บนขอบของโดเมน คือ $t=0$ หรือ $t=1$

แทนค่าใน $2(t+1)^2$ จะได้ว่า $t=0$ ให้ค่าน้อยสุด

ดังนั้น $t^* = 0$.

จะได้ $\xi(1,1) = t^*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (1-t^*)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

ที่ $\underline{j=2}$: ทำเช่นเดียวกัน จะได้ $t^* = 0$

ดังนั้น $\xi(1,2) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

ที่ $\underline{j=3}$: ทำเช่นเดียวกัน จะได้ $t^* = 0$

ดังนั้น $\xi(1,3) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

<u>S2</u>: ได้ $\xi(2) = \xi(2,0) = \xi(1,3) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

พิจารณา $\|\xi(2) - \xi(1)\| = \left\|\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\| = 0 < \delta$

$\Rightarrow$ STOP.

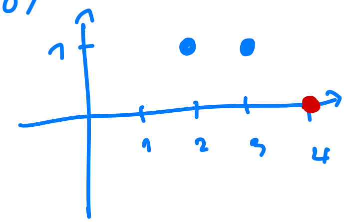
ดังนั้นจะได้ $z^* = \xi(2) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ ∎

$\boxed{\text{HW 5}}$: จงใช้สมการวรรคตรง ตาม ทบ. ของ SVM

หา w และ θ ของจุด x_1, x_2, x_3 ใน $\mathbb{R}^2$

โดยที่ $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_+ = \{x_3\}$, $X_- = \{x_1, x_2\}$



ซึ่งมี $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$

สร้าง $\tilde{F}(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$

ภายใต้เงื่อนไข $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i = 0$ และ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$.

$$\Rightarrow \tilde{F}(\lambda) = -\frac{1}{2} \Big[\lambda_1^2 (-1)^2 \langle x_1, x_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_2 (-1)(-1) \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$+ \lambda_1 \lambda_3 (-1)(1) \langle x_1, x_3 \rangle + \lambda_2 \lambda_1 (-1)(-1) \langle x_2, x_1 \rangle$$

$$+ \lambda_2^2 (-1)^2 \langle x_2, x_2 \rangle + \lambda_2 \lambda_3 (-1)(1) \langle x_2, x_3 \rangle$$

$$+ \lambda_3 \lambda_1 (1)(-1) \langle x_3, x_1 \rangle + \lambda_3 \lambda_2 (1)(-1) \langle x_3, x_2 \rangle \Big]$$

$$+ \lambda_3^2 (1)^2 \langle x_3, x_3 \rangle$$

โดยที่ $\langle x_1, x_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5$

$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 7$

$\langle x_1, x_3 \rangle = \langle x_3, x_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 8$

$\langle x_2, x_3 \rangle = \langle x_3, x_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 12$

$\langle x_2, x_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 10$

$\langle x_3, x_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 16$

จะได้ $$\tilde{F}(\lambda) = -\frac{1}{2}\Big[5\lambda_1^2 + 10\lambda_2^2 + 16\lambda_3^2 + 14\lambda_1\lambda_2 - 16\lambda_1\lambda_3 - 24\lambda_2\lambda_3\Big] + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

จากเงื่อนไข $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

จะได้ $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow$ แทนใน $\tilde{F}(\lambda)$

จะได้ $$\tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2}\Big[5\lambda_1^2 + 10\lambda_2^2 + 16\overbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}^{=\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} + 14\lambda_1\lambda_2 - 16\underbrace{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2} - 24\underbrace{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}\Big] + 2(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{1}{2}\Big[\underbrace{(16+5-16)}_{=5}\lambda_1^2 + \underbrace{(10+16-24)}_{=2}\lambda_2^2 + \underbrace{(32+14-16-24)}_{=6}\lambda_1\lambda_2\Big] + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{1}{2}\Big[5\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_1\lambda_2\Big] + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$$

หาจุดวิกฤติ:

$$\nabla \hat{F}(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} \hat{F}_{\lambda_1} \\ \hat{F}_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2 \\ -2\lambda_2 - 3\lambda_1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

แก้ระบบสมการ.

$$\begin{array}{ll} ① & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \Rightarrow ① \times 3 \Rightarrow 15\lambda_1 + 9\lambda_2 = 6 \\ ② & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \Rightarrow ② \times 5 \Rightarrow 15\lambda_1 + 10\lambda_2 = 10 \end{array} \Bigg\} \ominus$$

จะได้ $\lambda_2 = 4$

แทนใน ② $\Rightarrow 3\lambda_1 = 2 - 2\lambda_2 = 2 - 8 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-6}{3} = \frac{-1}{2}$

จะเห็นได้ว่า $\lambda_1 < 0$ ตามเงื่อนไข $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

ดังนั้น ค่า λ_1 ต้องอยู่ ขอบของโดเมน นั่นคือ $\lambda_1 = 0$

נקבל $\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 4$

וכן $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_3 = 0 + 4 = 4$

$$\therefore \quad \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 4, 4)$$

[illegible]. $\omega^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* y_i x_i$

$$= 0 \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 + 16 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[illegible] $\theta^* = \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\min_{x \in X_+} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* y_i \langle x_i , x \rangle}_{1} + \underbrace{\max_{x \in X_-} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* y_i \langle x_i , x \rangle}_{2} \Big)$

ומה. $X_+ = \Big\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}^{x_3} \Big\} , X_- = \Big\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{x_1} , \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{x_2} \Big\} , \lambda^* = (0, 4, 4)$

$$1 : = \min \Big\{ 0 + 4(-1) \Big\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle + 4(1) \Big\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \Big\}$$

$$= \min \{ -48 + 64 \} = 16$$

② : $= \max \left\{ \left[0 + 4(-1)\left\langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle + 4(1)\left\langle \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \right], \right.$

$\left. \left[0 + 4(-1)\left\langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right\rangle + 4(1)\left\langle \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right\rangle \right] \right\}$

$= \max \{ [0 - 28 + 32], [0 - 40 + 48] \}$

$= \max \{ 8, 8 \} = 8$

จะได้ $\theta^* = \frac{1}{2}(16 + 8) = 12$

จะได้ separating hyperplane.

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\langle x, \begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} \right\rangle - 12 = 0 \right\}$$

หรือ $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 4y - 12 = 0 \}$

$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 3 \}$

ดังรูป