

แบบฝึกหัดสำหรับกลางภาค 2561/2 ชุดที่ 2

- จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $\frac{1}{2x} \frac{dy}{dx} = e^{x-y}; \quad y(0) = 0$
- นาย A นำน้ำอุณหภูมิ 5 องศาเซลเซียสออกมาจากตู้เย็น มาเทใส่แก้วน้ำในห้องที่มีอุณหภูมิ 55 องศาเซลเซียส แต่แล้วลืมหืมและพบว่าผ่านไป 1 ชม. อุณหภูมิของน้ำเพิ่มขึ้นเป็น 35 องศาเซลเซียส จงหาว่าถ้าตั้งทิ้งไว้อีก 1 ชม. อุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มเป็นเท่าใด $\left(\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)\right)$

3. จงหาคำตอบทั่วไปของ $(\cos x) \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$

- ในวงจร RL ที่มีความต้านทาน (R) เป็น 20 โอห์ม ต่อกับตัวเหนี่ยวนำ (L) ขนาด 2 ฟารัด จงหาว่าที่เวลา t ใด ๆ กระแสในวงจรจะมีค่าเท่าใด ถ้าเริ่มต้นมีกระแสในวงจรเป็น 1 แอมแปร์ และในวงจรมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า (E) คงที่ขนาด 5 โวลต์ $\left(L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t)\right)$

5. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 2y' + 10y = 0; \quad y(0) = 7, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{-\pi}$

- ในขณะที่ อ.เบน อ.ศุภลักษณ์ และ อ.เอกชัย ออกข้อสอบกลางภาควิชา 206162 ได้มีการถกเถียงกันเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$4y'' + y = 5e^x + 1$$

โดย อ.เบน คิดว่าผลเฉลยคือ $y(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$ อ.ศุภลักษณ์ คิดว่าผลเฉลยคือ $y(x) = \cos \frac{x}{2} + e^x + 1$ ส่วน อ.เอกชัย คิดว่าผลเฉลยคือ $y(x) = e^x + 1$ อยากทราบว่า ใครในสามคนนี้ หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ได้ถูกต้อง พร้อมเหตุผล

7. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - y = x + \sin x$

- จงหา y_h และสมมติ y_p โดยไม่ต้องคำนวณค่า

8.1. $y'' - 2y' = 2 \sin(x) + \cos(2x)$

$y_h = \dots\dots\dots$

$y_p = \dots\dots\dots$

8.2. $9y'' - 6y' + y = 1 + xe^{2x} + e^{x/3}$

$y_h = \dots\dots\dots$

$$y_p = \dots\dots\dots$$

8.3. $y'' + 25y = (1 + e^x) \sin(5x)$

$$y_h = \dots\dots\dots$$

$$y_p = \dots\dots\dots$$

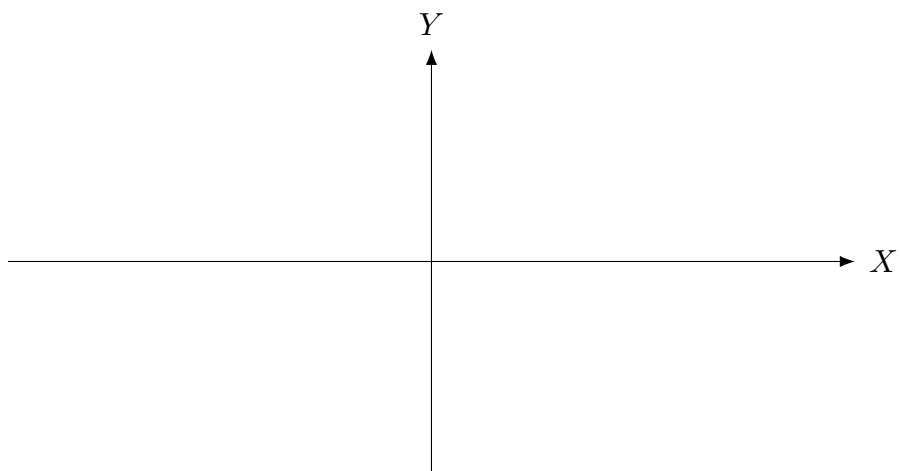
9. กำหนดให้ $F(s) = \frac{s-1}{4s^2+1}$ จงหาการแปลงลาปลาซของ $F(s)$

10. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + y' - 2y = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
โดยใช้การแปลงลาปลาซ

11. กำหนด $f(x, y) = e^{\sqrt{2-y}} \ln(x^2 + y^2 - 1)$

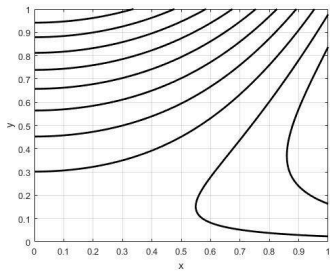
11.1. โดเมนของฟังก์ชัน $f = \dots\dots\dots$

11.2. จงเขียนกราฟของโดเมนของฟังก์ชัน f โดยแรเงาพื้นที่ที่เป็นโดเมน และใช้เส้นทึบแสดงขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน เส้นประแสดงขอบเขตที่ไม่รวมอยู่ในโดเมน

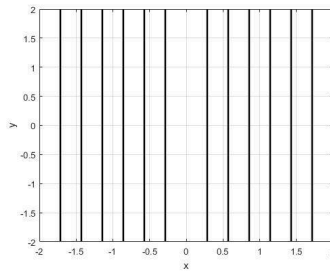


12. จงจับคู่กราฟของโค้งระดับในข้อ A-F กับฟังก์ชัน $f(x, y)$ ที่สอดคล้องกัน โดยนำเฉพาะอักษร A-F ไปเติมหน้าฟังก์ชันให้ถูกต้อง

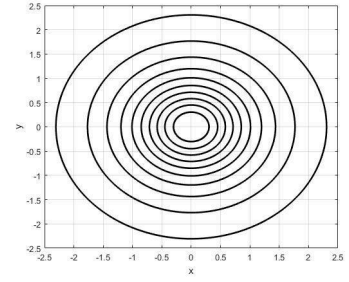
_____	$f(x, y) = e^{x+y}$	_____	$g(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
_____	$h(x, y) = y + \sin x$	_____	$w(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$



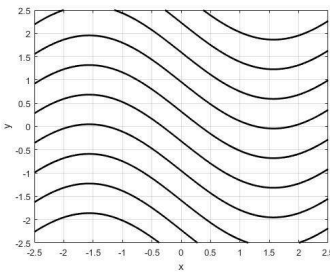
A



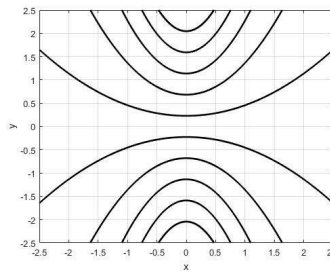
B



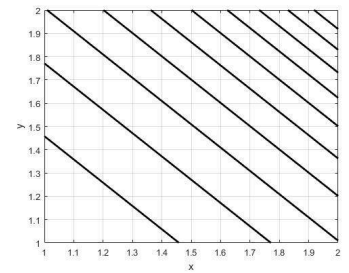
C



D



E



F

13. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

13.1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + e^{2xy^2}}{(1-x)^2 + 4y(y-1)}$

13.2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \sin\left(\frac{xy}{x+y}\right) \cos\left(\frac{x-y}{xy}\right)$

14. กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{(x^2 + 2y)^2}{x^2 + 2y^2}$

14.1. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ตามเส้น $y = 2x$

14.2. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ตามเส้น $y = x^4$

14.3. จากข้อ 14.1 และ 14.2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ หาค่าได้หรือไม่เพราะเหตุใด

15. กำหนด $f(x, y, z) = xy \cos(z) + \frac{1}{x + 2y - 3z}$

15.1. จงหา $f_x = \dots\dots\dots$

15.2. จงหา $f_z = \dots\dots\dots$

15.3. จงหา $f_{xz} = \dots\dots\dots$

15.4. จงหา $f_{yz}(1, 0, 0) = \dots\dots\dots$

16. กำหนดให้ $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s, t)$ จงใช้กฎลูกโซ่เขียนสูตรการหา $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ และ $\frac{\partial w}{\partial t}$

$\frac{\partial w}{\partial r} = \dots\dots\dots$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \dots\dots\dots$

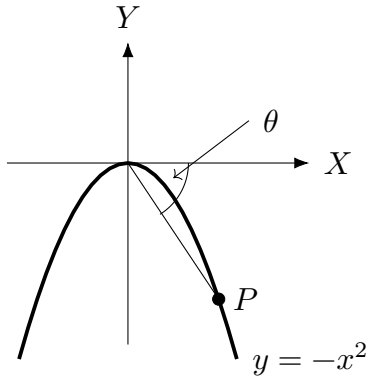
$\frac{\partial w}{\partial t} = \dots\dots\dots$

17. กำหนดฟังก์ชัน $y^2 \sin(2x - 5z) = 1 + x \tan(6yz)$ จงหา

$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots\dots\dots$

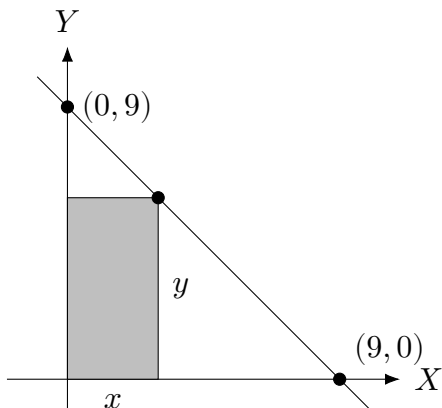
18. มดตัวหนึ่งเดินบนระนาบตามเส้นโค้งพาราโบลา $y = -x^2$ โดยเริ่มเดินจากจุดกำเนิดไปในควอดรันตที่ 4 ให้ θ เป็นมุมที่เส้นตรงที่ลากจากจุดที่มดเดินบนพาราโบลาไปยังจุดกำเนิดทำกับแกน X บวกดังรูป ถ้าขณะที่มดเดินไปถึงจุด P บนพาราโบลา พบว่าวัดระยะทางบนแกน X ได้ 1 หน่วย วัดมุม θ ได้ 45° โดยมีค่าผิดพลาดในการวัดระยะทางบนแกน X มีค่าเป็น 0.02 หน่วย และค่าผิดพลาดในการวัดมุม θ เป็น 1 องศา จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลรวมในการประมาณค่าผิดพลาดในการวัดระยะทางบนแกน Y (กำหนดให้ $\pi = 3.14$ จงตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง)



19. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 5x^2y + xy^2 - 15xy$$

20. จงเขียนปัญหาตัวคุณลากรองจ์ เพื่อหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มากที่สุด เมื่อกำหนดให้มุมหนึ่งของสี่เหลี่ยมอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(9, 0)$ และ $(0, 9)$ ดังรูป



21. จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน (โดยใช้วิธีตัวคุณลากรองจ์) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y$ โดยมีเงื่อนไขว่า (x, y) ต้องเป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 9$