แบบฝึกหัดสำหรับกลางภาค 2561/2 ชุดที่ 1

1. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $\quad \mathrm{e}^{-x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + x^2y^2, \quad y(0) = 0$

2. ขณะที่คุณจิมมี่อยู่บนเทือกเขาเอเวอเรสต์ เขาทดลองนำน้ำร้อนที่มีอุณหภูมิ 90 องศาเซลเซียส มาเทใส่แก้วน้ำ พบว่าผ่านไป 1 นาที อุณหภูมิของน้ำลดลงเป็น 30 องศาเซลเซียส จงหาเวลาที่น้ำมีอุณหภูมิเป็น 0 องศาเซลเซียส โดยปกติบนเทือกเขาเอเวอเรสต์มีอุณหภูมิเฉลี่ยอยู่ที่ -30 องศาเซลเซียส
$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s)\right)$

3. จงหาคำตอบเฉพาะของ $\quad \cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \cos^2 x, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$

4. ในวงจร RC ที่มีความต้านทาน (R) เป็น 20 โอห์ม ต่อกับตัวเก็บประจุ (C) ขนาด 0.01 ฟารัด และมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า (E) เป็น $40\mathrm{e}^{-3t}$ โวลท์ จงหาประจุไฟฟ้า ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าสมมติให้ที่เวลาเริ่มต้นไม่มีประจุในวงจรเลย $\quad \left(R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = E(t)\right)$

5. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 3, \quad y(1) = 0$

6. จงหา y_h และสมมติ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองต่อไปนี้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว**

   6.1. $\quad y'' - 3y = 4x^2\mathrm{e}^{3x}$

   $y_h \quad = \quad$ _____

   $y_p \quad = \quad$ _____

   6.2. $\quad y'' - 4y' + 4y = \sin(3x) + 5\mathrm{e}^{2x} + 1$

   $y_h \quad = \quad$ _____

   $y_p \quad = \quad$ _____

   6.3. $\quad y'' + 4y = x\cos(2x)$

   $y_h \quad = \quad$ _____

   $y_p \quad = \quad$ _____

7. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\quad y'' + y' - 2y = 2\mathrm{e}^{2x} + 4x - 8$

8. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ **โดยใช้การแปลงลาปลาซ**

9. กำหนดให้ $f(t) = (\mathrm{e}^{at} + \mathrm{e}^{bt})^2 + 5t^3$ จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว

   $\mathcal{L}\{f(t)\}$ = _____

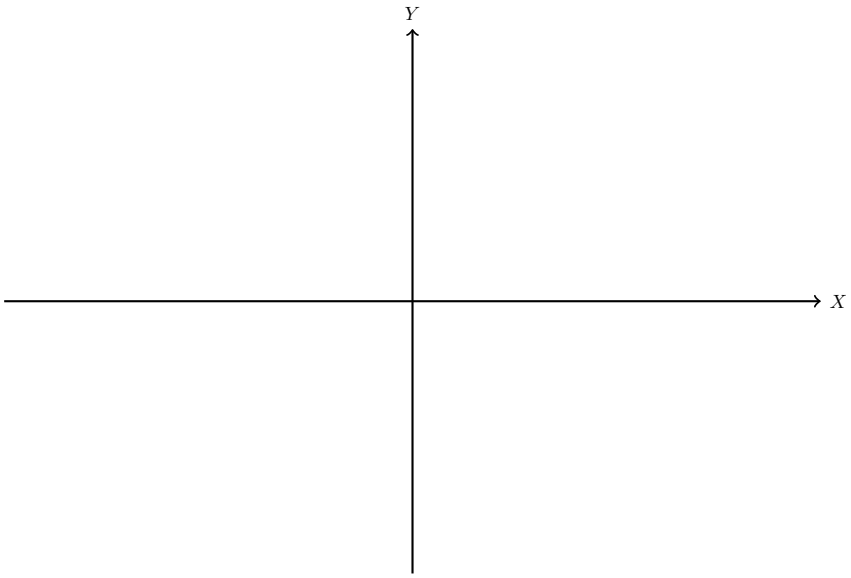
10. กำหนดให้ $F(s) = \frac{2s^3+s^2+7}{s^3(s^2+7)}$ จงหาผลการแปลงอินเวอร์สลาปลาซของ $F(s)$

    $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ = _____

11. กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y}}{y^2-x}$

    11.1. โดเมนของฟังก์ชัน f =_____

    11.2. จงเขียนกราฟของโดเมนของฟังก์ชัน f โดยแรเงาพื้นที่ที่เป็นโดเมน และใช้เส้นทึบแสดงขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน เส้นประแสดงขอบเขตที่ไม่รวมอยู่ในโดเมน



12. กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$

    12.1. จงเขียนสมการเส้นโค้งระดับ $z = k$ **(ที่ไม่อยู่ในรูปของเศษส่วน)** เมื่อ k เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

    - เมื่อ $k = 0$

      สมการเส้นโค้งระดับคือ _____

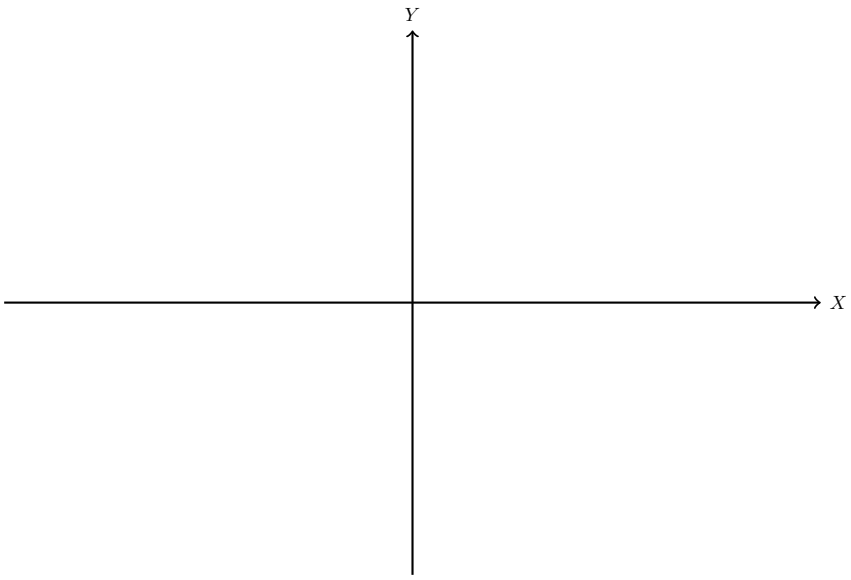
    - เมื่อ $k = \frac{1}{2}$

      สมการเส้นโค้งระดับคือ _____

    - เมื่อ $k = -\frac{1}{2}$

      สมการเส้นโค้งระดับคือ _____

12.2. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งระดับ $z = k$ เมื่อ $k = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$



13. กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

13.1. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ ตามเส้น $y = x^3$

13.2. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ ตามเส้น $y = 2 - x$

13.3. จากข้อ 13.1 และ 13.2 $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ หาค่าได้หรือไม่เพราะเหตุใด

14. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

14.1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{5xy^2}{(x-1)^2 + 2xy}$

14.2. $\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi)} \sin\left(\frac{x^2+y^2}{3x+y}\right)$

15. กำหนด $f(x,y,z) = z\sec(x) + \mathrm{e}^x y + \frac{6y}{z^3}$ และ
$x = \ln(r + 2u), \quad y = \tan(ru), \quad z = u^r$ จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

15.1. $f_x =$ _____

15.2. $\frac{\partial z}{\partial u} =$ _____

15.3. $f_{zx} =$ _____

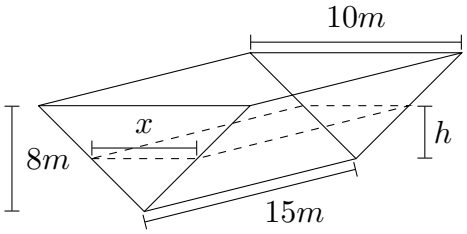
15.4. $f_{xy}(\pi, \frac{\pi}{4}, \pi) =$ _____

15.5. จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{\partial f}{\partial u}$

15.6. จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

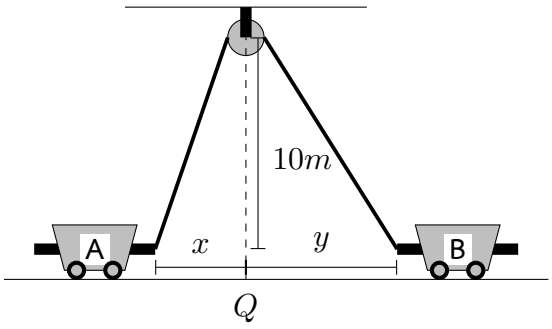
16. กำหนดฟังก์ชันโดยปริยาย $(x+z)^4 + z\sin^3\left(\frac{y}{3}\right) = y^2\cos(2z + x) + 2018$
จงหา $\frac{\partial z}{\partial y}$

17. เปิดน้ำใส่ถังรูปสามเหลี่ยมหงาย ให้ h เป็นความสูงของระดับน้ำในถัง และ x เป็นความกว้างของผิวน้ำ ดังรูป ถ้าวัดความสูง h ได้ 2 เมตร และความกว้าง x ได้ 3 เมตร โดยที่การวัดความสูง h มีค่าผิดพลาดในการวัดที่เป็นไปได้ 0.02 เมตรและการวัดความกว้าง x มีค่าความผิดพลาดในการวัดที่เป็นไปได้ 0.01 เมตร จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวมเพื่อประมาณค่าผิดพลาดในการคำนวณปริมาตร V ของน้ำในถังที่เป็นไปได้



18. จงหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดอานม้า (ถ้ามี) ของ
$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 30x$

19. รถขนของ A และ B เชื่อมกันด้วยเชือกยาว 39 เมตร และดึงผ่านรอก ดังรูป ให้ Q เป็นจุดที่ตรงกับตำแหน่งของรอกบนแนวระดับ x เป็นระยะทางที่รถขนของ A อยู่ห่างจากจุด Q และ y เป็นระยะทางที่รถขนของ B อยู่ห่างจากจุด Q จงเขียนรูปแบบปัญหาเพื่อหาระยะทางมากที่สุดที่รถขนของทั้งสองคันจะอยู่ห่างกัน
โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)



ปัญหาค่า _____ ของ _____

ภายใต้เงื่อนไข _____

20. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (ถ้ามี) ของ $f(x,y) = xy + 15$ สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่บนวงกลม $x^2 + y^2 = 32$ **โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์**