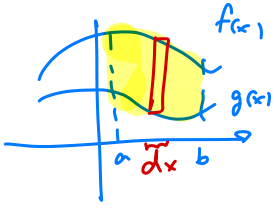
ทบทวน: อินทิกรัล 2 ชั้น

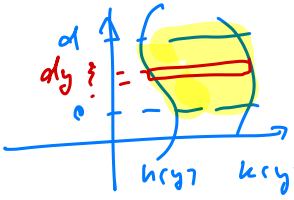
รูปทั่วไป. $\iint_R f(x,y)\,dA$

⇒ แบบ 1: dx ก่อน ⇒ $dA = dy\,dx$



$$\Rightarrow \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g(x)}^{y=f(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

⇒ แบบที่ 2: dy ก่อน ⇒ $dA = dx\,dy$

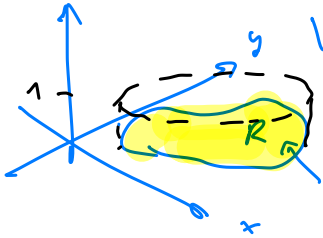


$$\Rightarrow \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=h(y)}^{x=k(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

ลำดับที่ $dx\,dy$ ก็ได้ ขึ้นอยู่กับความง่ายในการคำนวณ!

ตัวแปรในขอบเขต R และตัวแปรของอินทิกรัล

⇒ สามารถหาโดยใช้อินทิกรัล 2 ชั้น



$$V = \text{พื้นที่ } R = \iint_R 1\,dA$$

ปริมาตรที่ได้จากสมการ $z = 1$ คือ ปริมาตรของพื้นที่ R

⇒ อินทิกรัล พื้นที่ เขียนได้ว่า

$$\iint_{R(x,y)} f(x,y)\,dA(x,y) \Rightarrow \iint_{R(r,\theta)} f(r,\theta)\,dA(r,\theta)$$

$$\text{โดย } dA(r,\theta) = r\,dr\,d\theta$$

สมการพื้นที่:

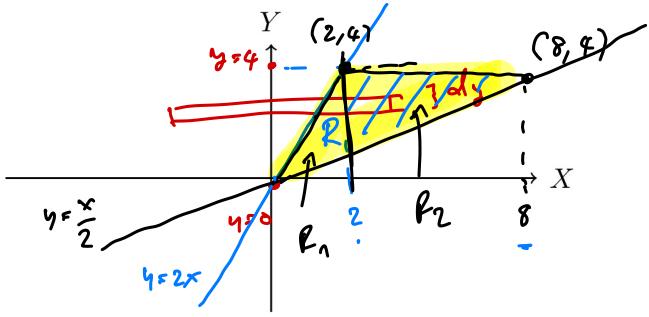
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

8. กำหนดอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$I = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^4 \int_{y/2}^{2y} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8.1. จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ R ที่สอดคล้องกับ I **(ระบุจุดตัดให้ชัดเจน)**



8.2. จงหาค่าของ $\int_0^4 \int_{y/2}^{2y} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\Rightarrow \iint_R \cos(x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=x/2}^{y=2x} \cos(x^2)\,dy\,dx + \int_{x=2}^{x=8}\int_{y=x/2}^{y=4} \cos(x^2)\,dy\,dx$$

(R_1) (R_2)

$$= \int_{x=0}^{x=2} \cos(x^2)\, y\Big|_{y=x/2}^{y=2x}\,dx + \int_{x=2}^{x=8} \cos(x^2)\, y\Big|_{y=x/2}^{y=4}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=2} \cos(x^2)\left(2x - \frac{x}{2}\right)dx + \int_{x=2}^{x=8} \cos(x^2)\left(4 - \frac{x}{2}\right)dx$$

① ② ③

$$= \int_{x=0}^{x=2} \cos(x^2)\left(\frac{3x}{2}\right)dx + \int_{x=2}^{x=8} \cos(x^2)\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \int_{x=2}^{x=8} \cos(x^2)\,4\,dx$$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ $\quad x=2$ $\quad u = x^2$ $\quad x=2$

C

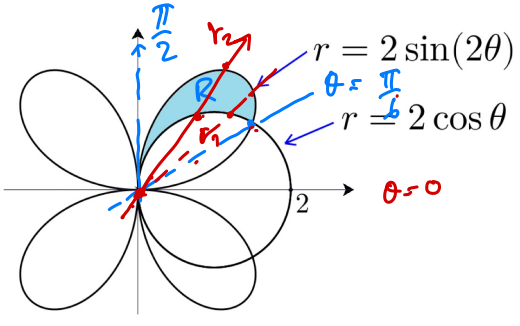
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

(9) : $4\int \underbrace{\cos(x^2)}_{u}\,\underbrace{dx}_{v} = 4\left[x\cos(x^2) - \int x\, d\cos(x^2)\right]$

$-\sin(x^2)(2x)\,dx$

$= 4\left[x\cos(x^2) + \int 2x^2 \sin(x^2)\,dx\right]$

9. กำหนดบริเวณ R เป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป



จงหาพื้นที่ A $\left(\sin(2A) = 2\sin A\cos A,\ \sin^2 A = \frac{1-\cos(2A)}{2} \text{ และ } \cos^2 A = \frac{1+\cos(2A)}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $r = 2\sin(2\theta)$

$R = \iint_R 1\,dA = \int\int 1\ \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{=}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ $r = 2\cos\theta$ $dA(r,\theta)$

$= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=2\cos\theta}^{r=2\sin 2\theta} d\theta$

$= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(2\sin(2\theta))^2}{2}\right] - \left[\frac{(2\cos\theta)^2}{2}\right] d\theta.$

$= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} 2\sin^2(2\theta) - 2\cos^2\theta\ d\theta.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \\ \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\end{array}\right] = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} 2\left[\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right] - 2\left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} -\cos(4\theta) - \cos(2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[-\frac{\sin(4\theta)}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[-\frac{\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})}{4} - \frac{\sin(2\cdot\frac{\pi}{2})}{2}\right] + \left[\frac{\sin(4\cdot\frac{\pi}{6})}{4} + \frac{\sin(2\cdot\frac{\pi}{6})}{2}\right]$$

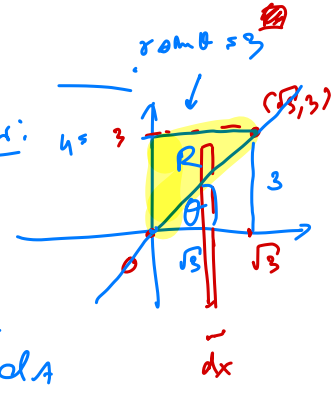
$= 0$

---

10. กำหนดให้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$I = \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}x}^{3} e^{x+y}\,dy\,dx$$

(R)



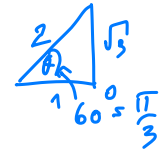
จงเขียน I ในรูปอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

$$I = \int_{r=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int e^{(r\cos\theta + r\sin\theta)}\, r\, d\theta\, dr$$

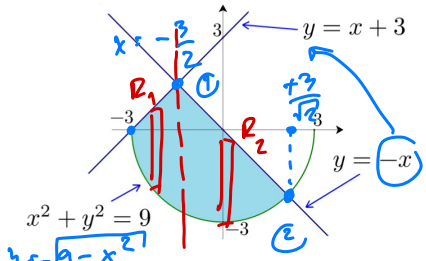
(3) (1) (2)

$\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$



11. กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป

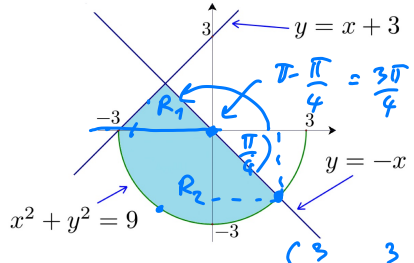


จงเขียนพื้นที่ของ R ในระบบพิกัดต่อไปนี้ **(โดยไม่ต้องคำนวณค่า)**

11.1. ระบบพิกัดฉาก $R =$ _____

11.2. ระบบพิกัดเชิงขั้ว $R =$ _____

บริเวณที่แรเงาดังรูป



12. กำหนดให้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว $I = \int_0^{\pi} \int_0^{4\sin\theta} r^3 \sin(r^2)\,dr\,d\theta$

จงเขียน I ในรูปอินทิกรัลสองชั้นใน**ระบบพิกัดฉาก (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)**

$I =$ _____