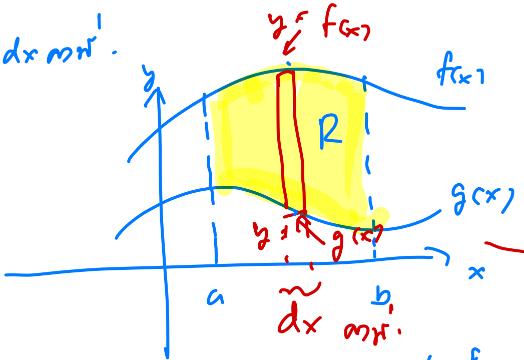
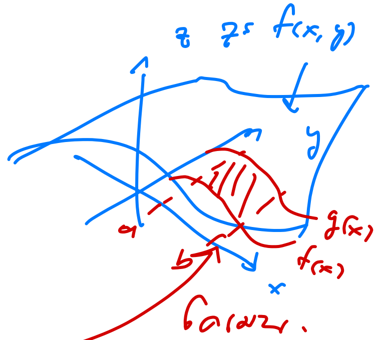
ทบทวน: อินทิกรัล 2 ชั้น Type I & Type II
(dx ตามท้าย) (dy ตามท้าย).

Type I: dx ตามท้าย.

โดเมน:

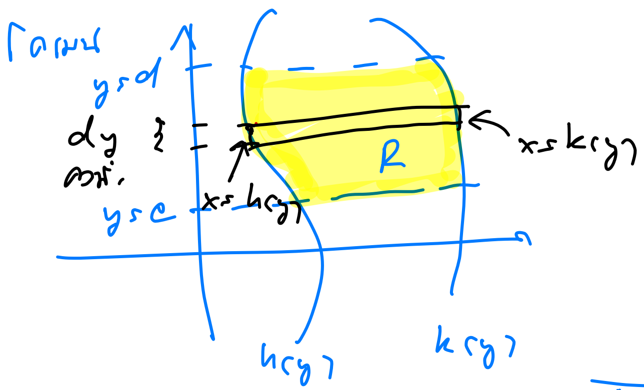




$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g(x)}^{y=f(x)} f(x,y)\,dy\,\underline{dx}}$$

Type II: dy ตามท้าย.

โดเมน



สมบัติ: $R = R_1 \cup R_2$

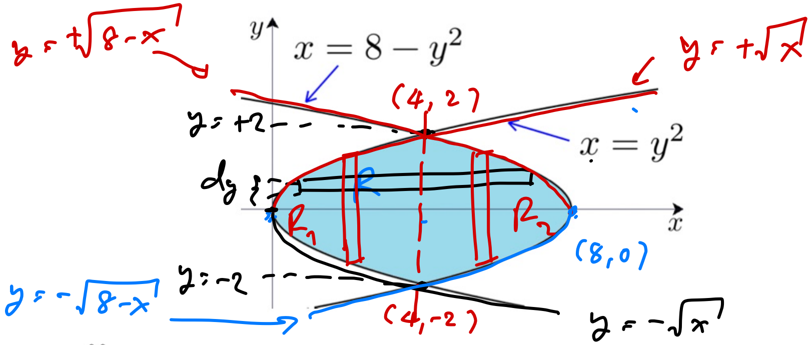
R_1, R_2 ไม่เหลื่อมซ้อนกัน

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=h(y)}^{x=k(y)} f(x,y)\,dx\,\underline{dy}}$$

การบ้าน:

6. กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป



จงเขียน $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$ ในลำดับการอินทิเกรตต่อไปนี้ **(โดยไม่ต้องคำนวณค่า)**

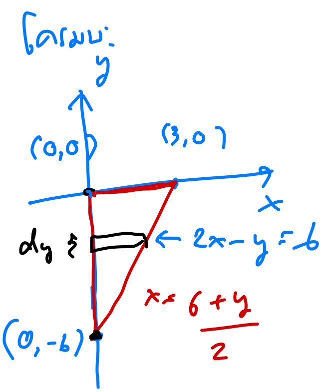
$$I = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=y^2}^{x=8-y^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

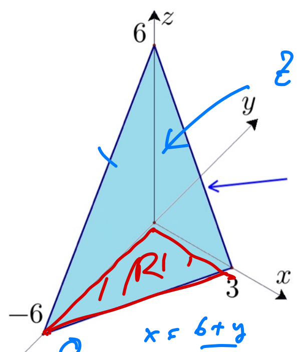
$$I = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=4}\int_{y=-\sqrt{x}}^{y=+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{x=4}^{x=8}\int_{y=-\sqrt{8-x}}^{y=+\sqrt{8-x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

(R_1) (R_2)

7. จงเขียนปริมาตรของทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $2x - y + z = 6$, ระนาบ $x = 0$, ระนาบ $y = 0$ และระนาบ $z = 0$ ดังรูป ในรูปของ**อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก** **(โดยไม่ต้องคำนวณค่า)**

โดเมน:





$z = f(x,y) \Rightarrow E = \iint_R f(x,y)\,dA$

$\Rightarrow z = \underbrace{6-2x+y}_{f(x,y)}$

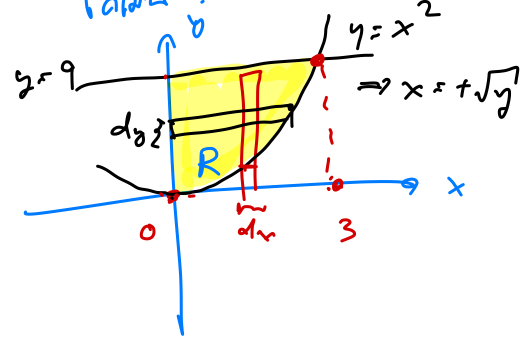
$$\text{ปริมาตร } E = \int_{y=-6}^{y=0}\int_{x=0}^{x=\frac{6+y}{2}} 6-2x+y\,dx\,dy$$

Ex: จงหาค่าอินทิกรัล.

$$\int_{x=0}^{x=3}\int_{y=x^2}^{y=9} \underbrace{x^3 e^{y^3}}_{f(x,y)}\, dy\, dx$$

$\underbrace{x=0 \quad y=x^2}_{R}$

โดเมน



$$= \int_{y=0}^{y=9}\int_{x=0}^{x=+\sqrt{y}} x^3 e^{y^3}\, dx\, dy \quad (R) \quad = \int_{y=0}^{y=9} \left(\frac{x^4}{4} e^{y^3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$u=y^3 \Rightarrow du = 3y^2 dy \Rightarrow dy = \frac{du}{3y^2}$$

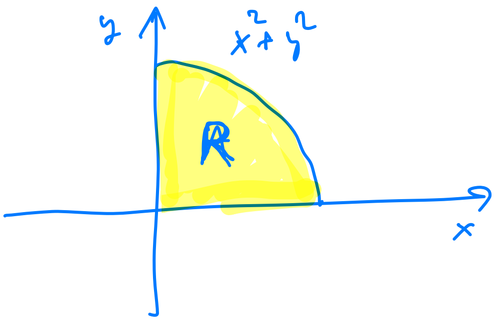
$$= \int_{y=0}^{y=9} \left[\frac{y^2}{4} e^{y^3}\right] - 0 \;\; dy$$

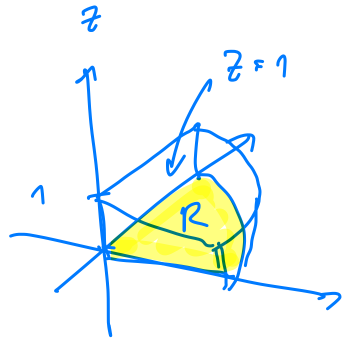
$$= \int_{y=0}^{y=9} \frac{\cancel{y^2}}{4} e^{u} \frac{du}{3\cancel{y^2}} = \frac{1}{12} e^{u}\Bigg|_{y=0}^{y=9} \quad u=y^3$$

$$= \frac{1}{12} e^{y^3}\Bigg|_{y=0}^{y=9} = \frac{1}{12}\left[e^{9^3} - 1\right]$$

=> พื้นที่โดยอินทิกรัล 2 ชั้น :

<u>หาพื้นที่ใน 2D:</u>



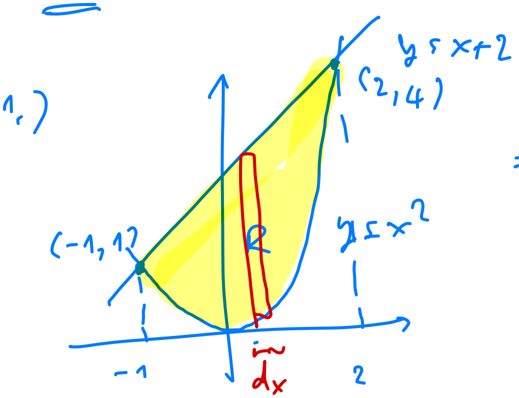


$V = A \times 1 \Rightarrow V = A$

$$\boxed{V = \iint_R 1 \, dA = A}$$

<u>Ex:</u> จงใช้อินทิกรัล 2 ชั้น หาพท. ดังรูป:

1.)



$$\Rightarrow \boxed{\text{พท}R = \iint_R 1 \, dA}$$

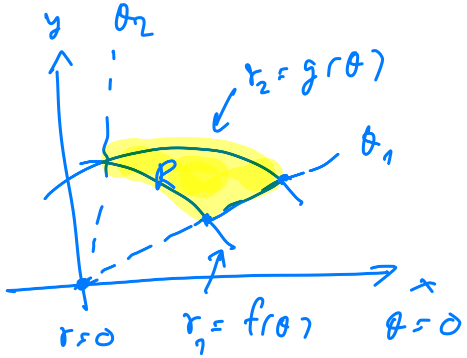
$$= \int_{x=-1}^{2} \int_{y=x^2}^{y=x+2} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=-1}^{x=2} y \Big|_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \int_{x=-1}^{x=2} (x+2) - x^2 \, dx$$

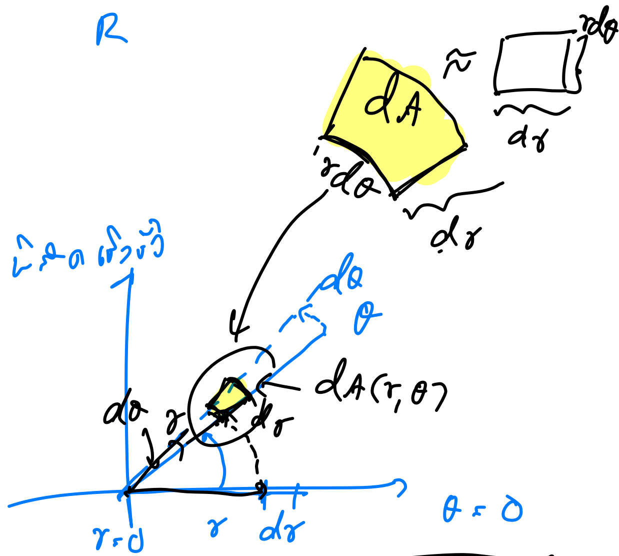
$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{x=-1}^{x=2} = \ldots$$

=> อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว:

พิกัดฉาก $dA = dx\,dy,\ dy\,dx$

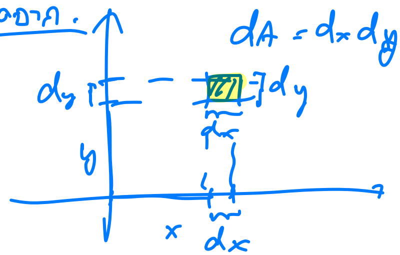


$$\Rightarrow \iint_R f(r,\theta)\, dA(r,\theta)$$



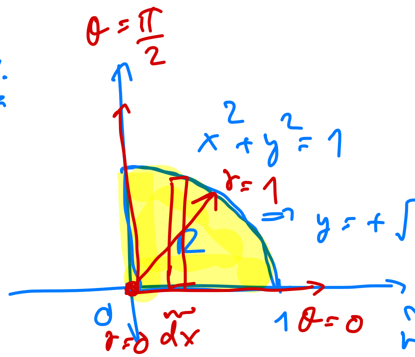
พิกัดฉาก.

$dA = dx\,dy$



*** $\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$

Ex:



$$\text{พท.} = \iint_R 1\, dA$$

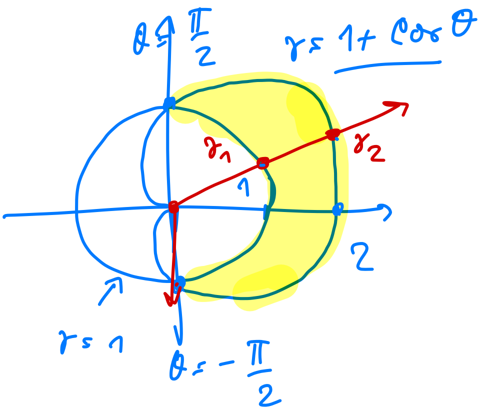
พิกัดฉาก. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=+\sqrt{1-x^2}} 1\, dy\, dx$

พิกัดเชิงขั้ว: $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1} 1\, \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}$

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - 0\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}. \checkmark$$

Ex: หาขอบเขตลิมิตของ $\iint_R f(r,\theta)\, dA$ เมื่อ R คือบริเวณดังรูป.

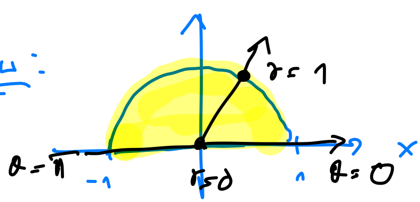


$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta)\, \overbrace{r\,dr\,d\theta}^{dA(r,\theta)}$$

Ex: จงหาค่าของ $\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$ เมื่อ R คือ

บริเวณครึ่งวงกลมปิดล้อมด้วยแกน x และเส้นโค้ง $y = \sqrt{1-x^2}$

โดเมน:



$$\Rightarrow \iint_R e^{x^2+y^2}\, \underline{dA(x,y)} = \iint_R \underbrace{e^{x^2+y^2}}_{\text{เปรียบ } f(r,\theta)} dA(r,\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=1} e^{r^2 \leftarrow x^2+y^2} \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2+y^2 = r^2$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=1} e^{r^2} r\,dr\,d\theta \qquad u = r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr \Rightarrow dr = \frac{du}{2r}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=1} e^{u}\, \cancel{r}\, \frac{du}{2\cancel{r}}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{e^{u}}{2} \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \quad (u = r^2) \quad = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{e^{r^2}}{2} \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right] d\theta = \left(\frac{e-1}{2}\right)\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{\pi(e-1)}{2}$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด ชุด 1 ข้อ 8 + 9.