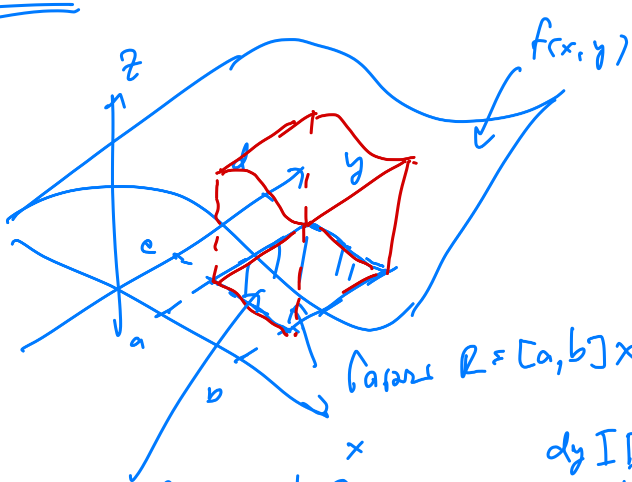
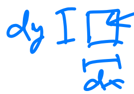
## ทบทวน: อินทิกรัล 2 ชั้น ที่โดเมนเป็น □ ผืนผ้า




โดเมน $R = [a,b]\times[c,d]$ เป็น □ ผืนผ้า.




$dA = dxdy = dydx$

ปริมาตรใต้กราฟ เรียก

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA \quad , R = [a,b]\times[c,d]$$

$dA = dxdy$ (หรือ $dydx$)

(หรือ) $$= \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\,dy$$

(Fubini) $$= \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy\,dx$$

สลับ $dxdy$, $dydx$.

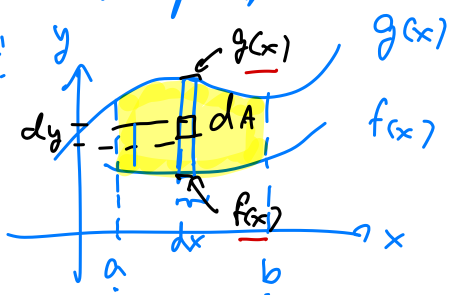
---

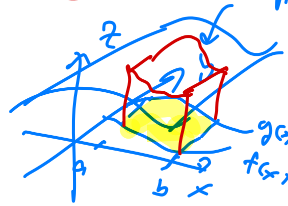
กรณีที่โดเมน $R$ ไม่อยู่ในรูป □ ผืนผ้า.

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

**Type I:** $dx$ ก่อน!

โดเมน:



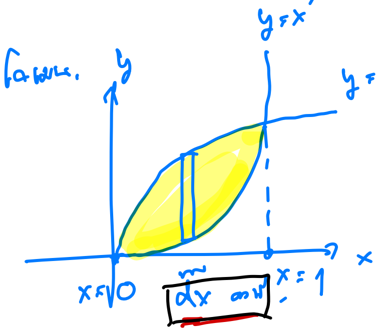



$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=f(x)}^{y=g(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

Type I
dx ตามที่

Ex: หาค่าของ $\iint_R 4xy - y^3\,dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ และ $y=x^3$

วาดกราฟ,




$$\iint_R 4xy - y^3\,dA$$

อยู่ในรูป $g(x)$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} 4xy - y^3\,dy\right)\boxed{dx}$$

ขอบล่างอยู่ในรูป $f(x)$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{4xy^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx$$

จะเหลือแต่ตัวแปร $x$

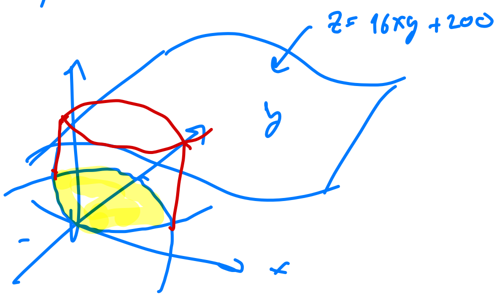
$$= \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{4x(\sqrt{x})^2}{2} - \frac{(\sqrt{x})^4}{4}\right] - \left[\frac{4x(x^3)^2}{2} - \frac{(x^3)^4}{4}\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} 2x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{4x^7}{2} + \frac{x^{12}}{4}\,dx$$

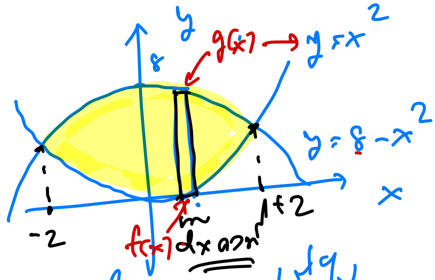
$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^3}{4\cdot 3} - \frac{4x^8}{2\cdot 8} + \frac{x^{13}}{13\cdot 4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{52}\right] - 0$$

Ex: จงหาปริมาตรทรงตันปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 16xy + 200$ อยู่เหนือบริเวณ $R$ บนระนาบ $xy$ ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $y = 8 - x^2$




โดเมน.




ปริมาตรทรงตัน $V = \iint_R 16xy + 200 \, dA$ รูปทั่วไป.

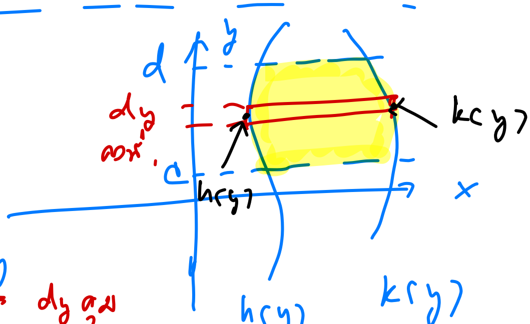
(dx ตั้ง) $$\boxed{= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=8-x^2} 16xy + 200 \, dy \right) dx}$$ dx นอก.

$$= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \frac{16xy^2}{2} + 200y \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2} \underbrace{\left[ \frac{16x(8-x^2)^2}{2} + 200(8-x^2) \right] - \left[ \frac{16x(x^2)^2}{2} + 200x^2 \right]}_{\text{เหลือแต่ตัวแปร } x} dx$$

---

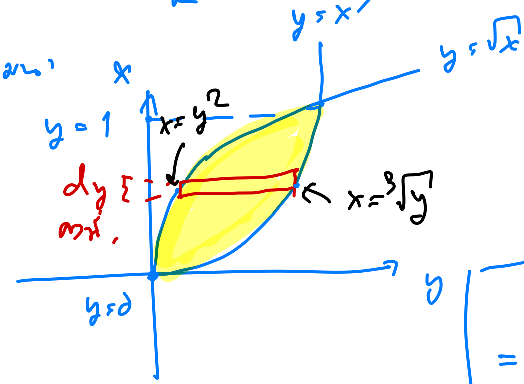
Type II: dy นอน:      โดเมน




$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h(y)}^{x=k(y)} f(x,y)\, dx\, dy \Rightarrow$$ dy นอก

**Ex:** จงหาค่า $\iint_R 4xy - y^3 \, dA$ เมื่อ $R$ คือ พท. ที่ล้อมด้วย $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ (โดยอินทิเกรตแบบ $dx\,dy$)

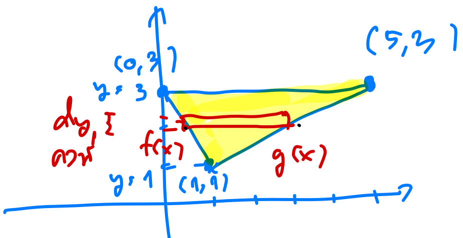
วิธีทำ




$$\iint_R 4xy - y^3 \, dA = \boxed{\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=\sqrt[3]{y}} 4xy - y^3 \, dx \, dy}$$

**Ex:** จงหาค่าของ $\iint_R (6x^2 - 40y) \, dA$ เมื่อ $R$ คือ $\triangle$ ที่มีจุดยอดเป็น $(0,3), (1,1), (5,3)$

วิธีทำ:




$$\iint_R 6x^2 - 40y \, dA = \boxed{\int_{y=1}^{y=3} \int_{x=\frac{y-3}{-2}}^{x=2y-1} 6x^2 - 40y \, dx \, dy}$$

$dy$ นอก

- $f(x) = m_1 x + c_1$, $m_1 = \frac{1-3}{1-0} = -2$

$\Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{-2}$

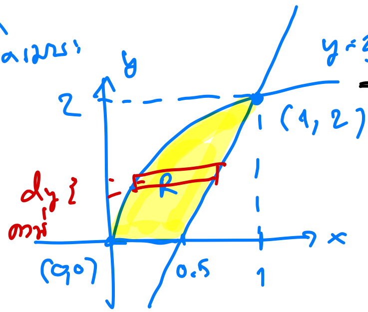
- $g(x) = m_2 x + c_2$, $m_2 = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y - 1$

Ex: จงหาปริมาตรของทรงตันปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 16 - x^2 - y^2$ อยู่เหนือบริเวณ $R$ บนระนาบ $xy$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = 4x - 2$

$y = 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{4}$

โดเมน R:




$\Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$

หาจุดตัด: จาก $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$

แทนค่าใน $y = 4x - 2$

$\Rightarrow y = \cancel{4}\frac{y^2}{\cancel{4}} - 2$

$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$(y+1)(y-2) = 0, \; y = -1, 2$

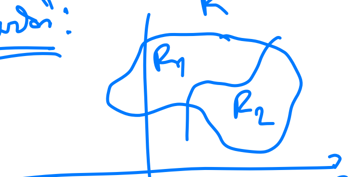
$$V = \iint_R 16 - x^2 - y^2 \, dA = \int_{y=0}^{y=2} \left( \int_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=\frac{y+2}{4}} 16 - x^2 - y^2 \, dx \right) dy$$

$\leftarrow$ dy ด้านนอก.

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left( 16x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right) \Big|_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=\frac{y+2}{4}} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left[ (16 - y^2)\left(\frac{y+2}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{4}\right)^3 \right] - \left[ (16 - y^2)\left(\frac{y^2}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{y^2}{4}\right)^3 \right] dy$$

รวมได้:

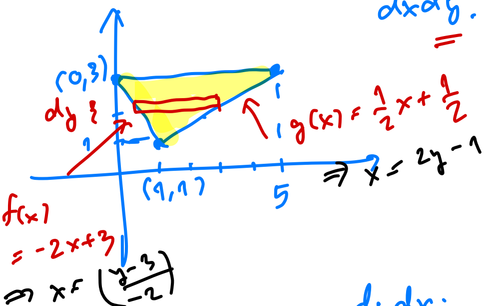



$R = R_1 \cup R_2$

$R_1, R_2$ ไม่เหลื่อมล้ำกัน

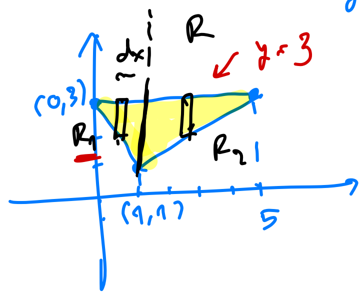
$$\Rightarrow \iint_R f(x,y) \, dA = \iint_{R_1} f(x,y) \, dA + \iint_{R_2} f(x,y) \, dA$$

Ex: จงเขียน $\iint_R f(x,y)\,dA$ ในรูป $dx\,dy$ และ $dy\,dx$ โดย $R$ กำหนดดังรูป.




$dx\,dy$:

$$\int_{y=1}^{y=3} \int_{x=\left(\frac{y-3}{-2}\right)}^{x=(2y-1)} f(x,y)\,dx\,dy$$




$dy\,dx$:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

โดยที่

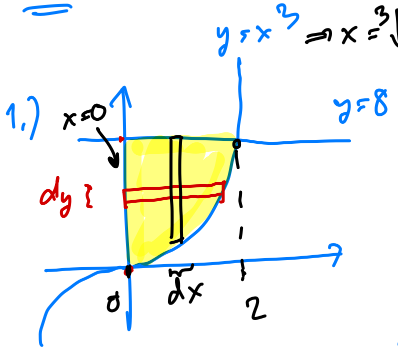
$$\iint_{R_1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-2x+3}^{y=3} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_{R_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=1}^{x=5} \int_{y=\frac{x+1}{2}}^{y=3} f(x,y)\,dy\,dx$$

การบ้าน:
แบบฝึกหัด ชุด 1
ข้อ 6+7

---

Ex: จงเขียนอินทิกรัล 2 ชั้น $\iint_R f(x,y)\,dA$ ในลำดับอินทิกรัลที่กำหนด 48.




- $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=8} \int_{x=0}^{x=\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

- $$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^3}^{y=8} f(x,y)\,dy\,dx$$