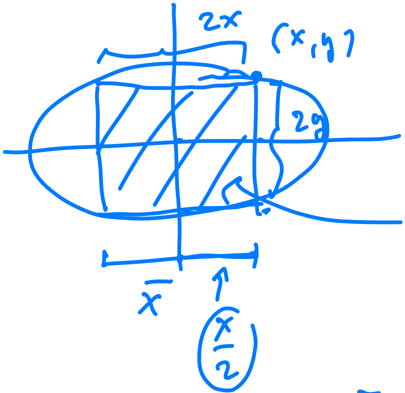


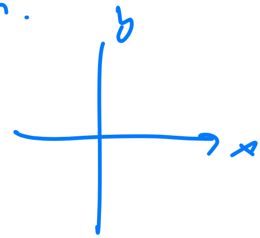
พท $= (2x)(2y) = 4xy$.

เงื่อนไข $4x^2+y^2=9$

พอ: พท $= xy$

เงื่อนไข $4\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=9$

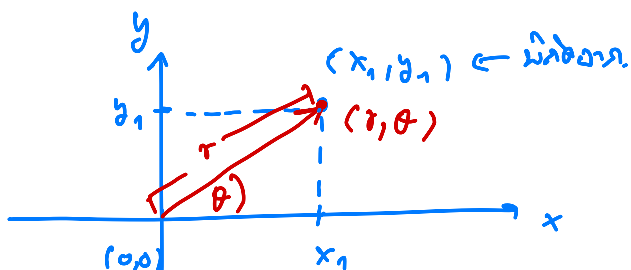
บทที่ 4: ภาพในปริภูมิ 2 มิติ และ 3 มิติ.

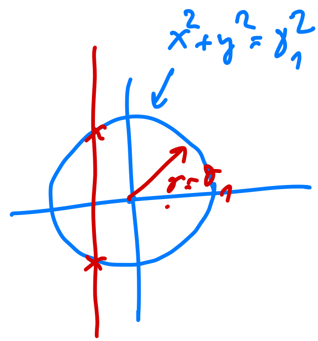


ปริภูมิ 2 มิติ : - เชิงพิกัดฉาก (x,y)

- เชิงขั้ว. (r,θ)

→ ระบบพิกัด เชิงขั้ว.



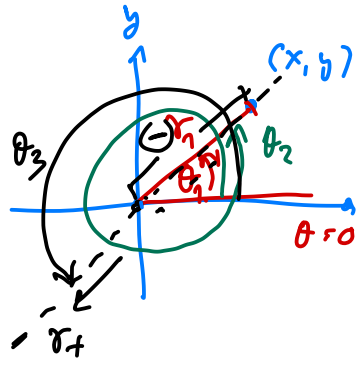


ความสัมพันธ์:

$x = r\cos\theta$ | $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\theta$ | $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

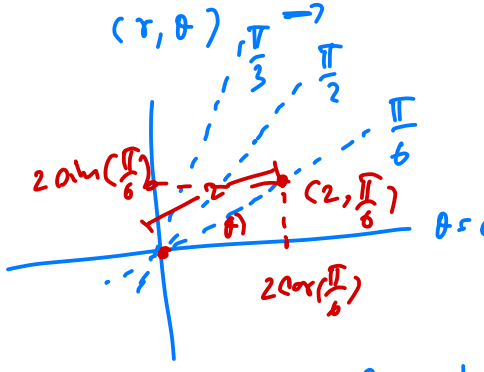
หมายเหตุ: ต่อจุด $(x,y) \to (r,\theta)$ จะมีได้หลายจุด (r,θ) เช่น



- $(r_1,\theta_1) = (r_1,\theta_2)$ โดย $\theta_2 = 2\pi n + \theta_1$
- $(r_1,\theta_1) = (-r_1,\theta_1+\pi)$

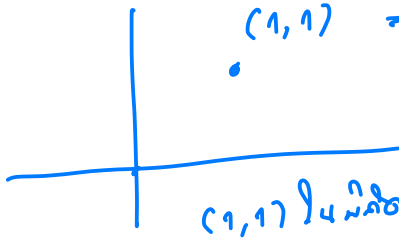
ตัวอย่าง จงเขียนจุดต่อไปนี้ในพิกัดฉาก

1.) $(2,\frac{\pi}{6})$ จากความสัมพันธ์ $x = r\cos\theta = 2\cos(\frac{\pi}{6})$, $y = r\sin\theta = 2\sin(\frac{\pi}{6})$



2.) จงเขียนพิกัดฉากในรูปพิกัดเชิงขั้ว ที่ $\theta \in [0, 2\pi]$

$(x,y) = (1,1)$



$\to$ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

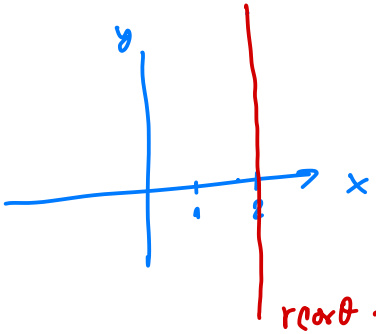
$\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

(1,1) ในพิกัดฉากคือ $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ ในพิกัดเชิงขั้ว

⇒ เส้นโค้งในพิกัดเชิงขั้ว. เปลี่ยนไปอยู่ในรูปพิกัดฉาก.

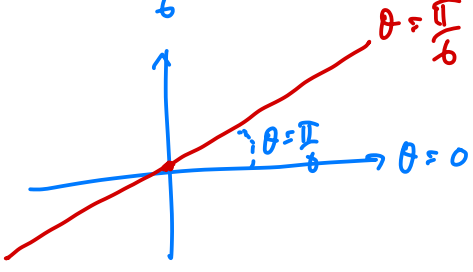
- $r\cos\theta = 2 \Longrightarrow x = 2$

ความสัมพันธ์.
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

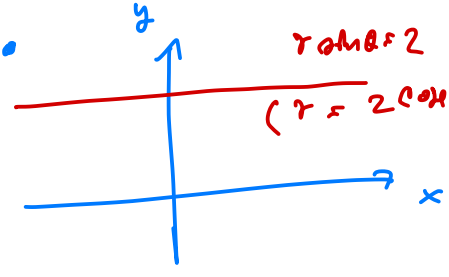


$r\cos\theta = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta$

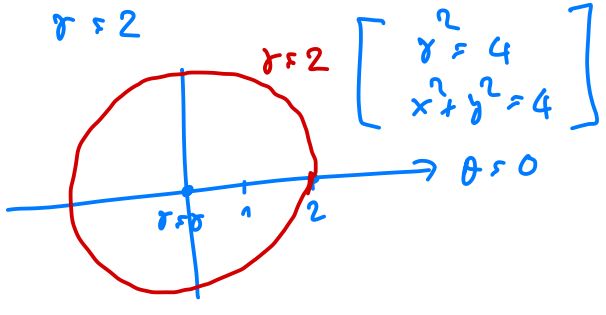
- $\theta = \frac{\pi}{6}$



- $r\sin\theta = 2$



- $r = 2$



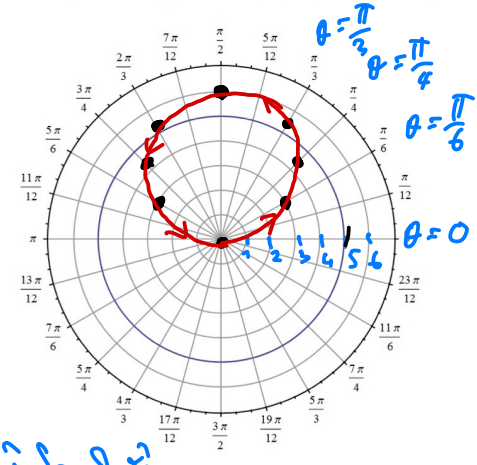
$r^2 = 4$
$x^2 + y^2 = 4$

⇒ กราฟ $r = 6\sin\theta$

เขียนตาราง วาดกราฟ:

$r = 6\sin\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	3	4.2	5.2	6	5.2	4.2	3	0

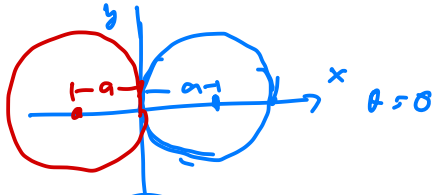


⇒ รวมกราฟพื้นฐานที่พบบ่อยในหัวข้อนี้ไว้ด้วย

- $r = a$

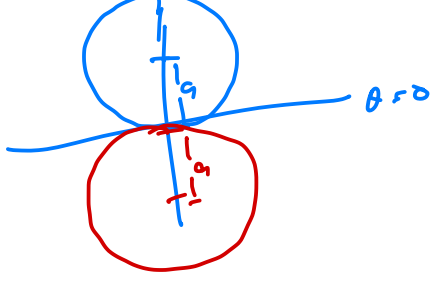
- $r = 2a\cos\theta$

  $r = -2a\cos\theta$



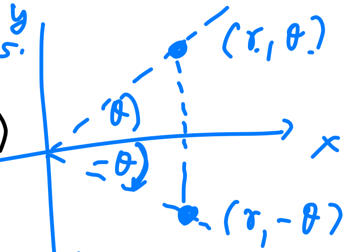
- $r = 2a\sin\theta$

  $r = -2a\sin\theta$



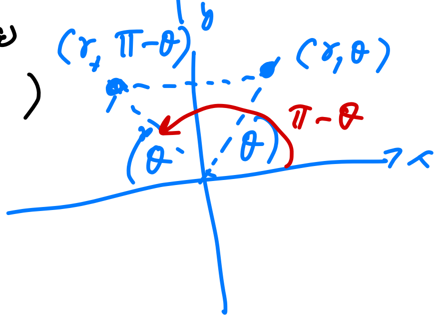
⇒ สมบัติ การสมมาตร:

ทดสอบแทนจุดบนระนาบ.



ทดสอบ สมมาตรตาม แกน x (แทน θ ด้วย $-\theta$)

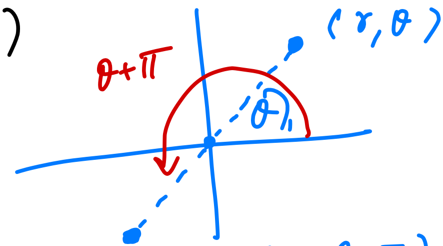
สมมาตรตามแกน y (แทน θ ด้วย $\pi - \theta$)



สมมาตรตาม จุดกำเนิด.

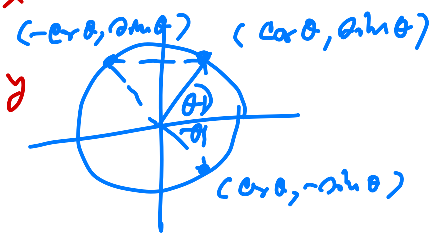
แทน r ด้วย $-r$

หรือ (แทน θ ด้วย $\theta+\pi$)



สมบัติ ตรีโกณมิติ:

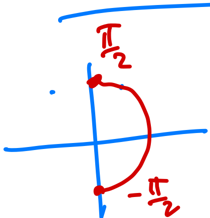
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$ — สมมาตร x
- $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ — สมมาตร y
- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$



Ex: เขียนกราฟ เชิงขั้ว ของ $r = 1 + \sin\theta$

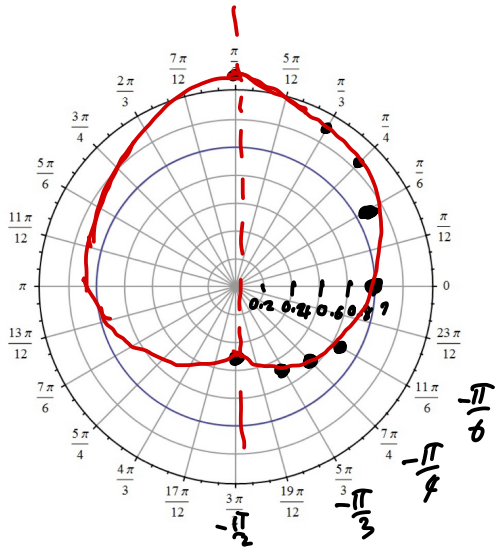
ตรวจสอบ สมมาตร: เปลี่ยน θ เป็น $\pi - \theta$ จะได้

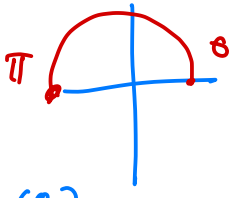
$r = 1 + \sin(\pi-\theta) = 1 + \sin(\theta)$ สมมาตรแกน y



$r = 1 + \sin\theta$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0.52	0.67	0.75	0.83	1	1.16	1.25	1.33	1.48





$\Rightarrow r = 1 + 2\cos\theta$

กลับสมมาตร: $r = 1 + 2\cos(-\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$

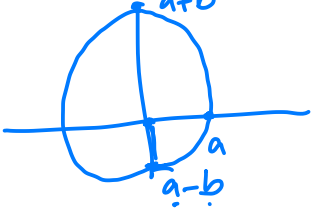
$\theta \to (-\theta)$ แล้วได้สมการเดิมแสดงว่าสมมาตรแกน X

$\Rightarrow$ รูปทั่วไป: เส้นโค้งลิมาซอง (Limaçons)

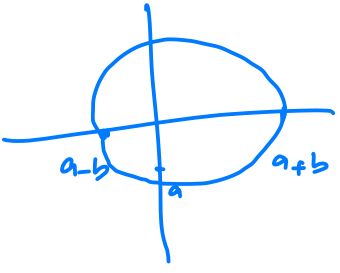
$r = a \pm b\sin\theta$, $r = a \pm b\cos\theta$

สมมาตรแกน y

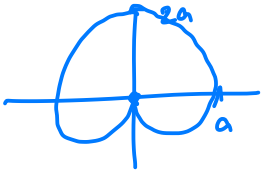
$a > b$



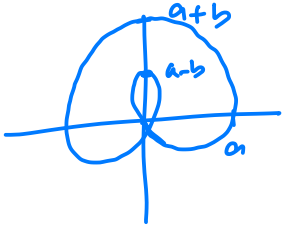
สมมาตรแกน x

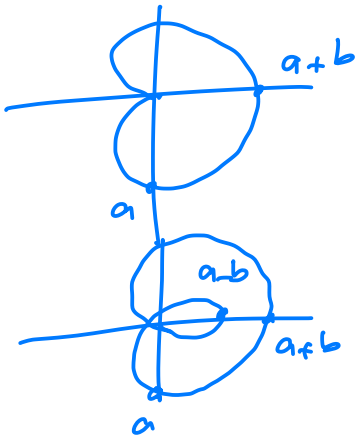


$a = b$



$a < b$





ตัวอย่าง: จงหาสมการเชิงขั้ว. (แกนขั้วคือแกน x)

$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$