$\Rightarrow$ หาจุด ต่ำสุด/สูงสุด สัมพัทธ์ /จุดอานม้า.

ให้ $f(x,y)$

① หาจุดวิกฤต ด้วยการแก้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

② ให้ x, y. เป็นจุดวิกฤต สร้าง $D(x,y)$

$$D(x,y) := f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

ถ้า

$$D(x,y) \begin{cases} > 0 \begin{cases} f_{xx} < 0 & \text{จุดสูงสุดสัมพัทธ์} \\ f_{xx} > 0 & \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์.} \end{cases} \\ < 0 \quad \text{—} \quad \text{จุดอานม้า} \\ = 0 \quad \text{สรุปไม่ได้.} \end{cases}$$

— — — — — — — — — — — — —

Ex: 36. จงหา ค่าสูงสุด /ต่ำสุดสัมพัทธ์ พร้อมจุดอานม้า (ถ้ามี)

ของ $f(x,y) = 2x^2y - y^2 - 4x^2 + 3y.$

① หาจุดวิกฤต ด้วยการแก้ $f_x = 0$ และ $f_y = 0$

$$f_x = 4xy - 8x = 0 \quad \text{———} \quad ①$$

$$f_y = 2x^2 - 2y + 3 = 0 \quad \text{———} \quad ②$$

จาก ② $\Rightarrow$ $\quad y = \dfrac{2x^2 + 3}{2} \quad \text{———} \quad ③$

แทนค่า y ใน ① $\Rightarrow$ $2\cancel{+}x\left(\dfrac{2x^2+3}{2}\right) - 8x = 0$

$\Rightarrow 4x^3 + 6x - 8x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{หรือ} \\ 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

จะได้ $x = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

แทนค่าใน ③ จะได้. $x = 0: \quad y = 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\qquad\qquad x = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}: \quad y = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)+3}{2} = 2$

$\qquad\qquad x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}: \quad y = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)+3}{2} = 2$

ดังนั้น จุดวิกฤต. คือ $\left(0, \dfrac{3}{2}\right), \left(+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$

② จาก $D(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

จะได้,

$\qquad f_x = 4xy - 8x \qquad\qquad , \quad f_{xx} = 4y - 8$

$\qquad f_y = 2x^2 - 2y + 3 \qquad , \quad f_{yy} = -2$

$\qquad f_{xy} = 4x$

จะได้ $D(x,y) = (4y-8)\cdot(-2) - (4x)^2$

แทนค่า จุดวิกฤต. $(x,y) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right), \left(+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$

| (x,y) | | $D(x,y)$ | | | f_{xx} (จะได้ y_{11}) |

$(0, \frac{3}{2})$ | $\left(4\left(\frac{3}{2}\right)-8\right)(-2) > 0$ | $f_{yy} < 0$ จุดสูงสุด

$(+\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ | $(4(2)-8)(-2) < 0$ | จุดอานม้า

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ | $(4(2)-8)(-2) < 0$ | จุดอานม้า.

∴ จุดที่ๆจะเกิดค่าสูงสุดคือ $(x, y) = (0, \frac{3}{2})$

และไม่สามารถ จะเกิดค่า ต่ำสุด ได้ที่ จุด $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ ⧄

— — — — — — — — — — — — —

⇒ วิธีตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange Multiplier.)

รูปแบบ:

$\begin{cases} \text{หาค่า สูงสุด/ต่ำสุดของ.} \quad f(x, y) \\ \text{ภายใต้เงื่อนไข.} \qquad g(x, y) = 0 \end{cases}$

สร้างฟังก์ชัน. Lagrange: $F(x, y, \lambda)$

Lagrange multiplier.

① โดย. $\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).}$

เพื่อ หาค่า สูงสุด / ต่ำสุด ของ $F(x, y, \lambda)$.

② โดย ต้องการ จุดวิกฤต. (x, y) ห.   → ได้จุด (x, y)

$\qquad F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_\lambda = 0$

③ นำ จุดวิกฤตที่ได้ไปแทนค่าใน $f(x, y)$ เพื่อหาจุดต่ำสุด/สูงสุด

Ex: จงหาค่าสูงสุดของ $f(x,y) = xy$.

เมื่อ (x,y) อยู่บนเส้น: $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

โดยใช้ตัวคูณลากรองจ์

$$\begin{cases} \text{ฟังก์ชันจุดประสงค์} \quad f(x,y) = xy. \\ \text{เงื่อนไขบังคับ.} \qquad g(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ สร้าง $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y))$

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1\right)$$

$\boxed{2}$ หาอนุพันธ์ย่อย. ให้ $F_x = F_y = F_\lambda = 0$

$$F_x = y + \dfrac{2\lambda x}{8} = 0 \qquad\qquad \text{——①}$$

$$F_y = x + \dfrac{2\lambda y}{2} = 0 \qquad\qquad \text{——②}$$

$$F_\lambda = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \qquad \text{——③}.$$

$$① \Rightarrow \lambda = -\dfrac{8y}{2x} \Big\}= \Rightarrow \dfrac{-4y}{x} = -\dfrac{x}{y}$$

$$② \Rightarrow \lambda = -\dfrac{x}{y}$$

จัดรูปใหม่. $\qquad x^2 - 4y^2 = 0 \text{ —— ④}$

จาก ③ $\Rightarrow \qquad x^2 + 4y^2 = 8 \text{ —— ⑤}$

⑤ − ④ ⇒ $8y^2 = 8$ ⇒ $y^2 = 1$ ⇒ $y = \pm 1$

จาก ④ ⇒ $x^2 = 4y^2$ ⇒ ถ้า $y = +1$ ⇒ $x^2 = 4$ ⇒ $x = \pm 2$

ถ้า $y = -1$ ⇒ $x^2 = 4$ ⇒ $x = \pm 2$

ดังนั้นจะได้จุดวิกฤต $(\pm 2, 1), (\pm 2, -1)$ (4 จุด.)

③ แทนค่าใน $f(x,y)$ แล้วดูจุดสุด

จาก $f(x,y) = xy$ จะได้

(x,y)	$f(x,y) = xy$
$(-2, 1)$	$(-2)(1) = -2$
$(+2, 1)$	$(+2)(1) = \boxed{2}$
$(-2, -1)$	$(-2)(-1) = \boxed{2}$
$(+2, -1)$	$(+2)(-1) = -2$

$\boxed{2}, \boxed{2}$ } ช่วงค่าสูงสุด ← ค่าค่าต่ำสุด.

ดังนั้น จุด สูงสุด คือ $(x,y) = (+2, 1), (-2, -1)$ ⚐

โดยมีค่าสูงสุด คือ 2 .

Ex :   จงหา ปริมาตร มาก สุด ของ กล่องเปิด ฝาที่มีพื้นผิว. 12 m²

(ทรงสี่เหลี่ยม)

$V(x, y, z) = xyz$

พื้นผิว. $A(x,y,z) = xy + 2zy + 2xz = 12$

เขียนในรูป ปัญหา การลากรองจ์
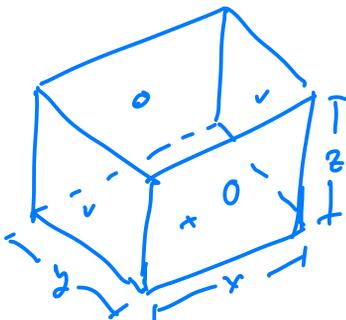
$$\begin{cases} \text{ฟังก์ชัน} & \text{อ็อบเจกต์ทีฟ} \text{ คือ} \quad f(x,y,z) = xyz \\ \text{เงื่อนไขที่ต้องเป็นไป} & g(x,y,z) = xy + 2zy + 2xz - 12 = 0 \end{cases}$$

① เขียนสมการลากรองจ์

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + 2zy + 2xz - 12)$$

② หาจุดวิกฤต (x,y,z) จาก

$$F_x = yz + \lambda y + 2\lambda z = 0 \quad\text{——} ①$$
$$F_y = xz + \lambda x + 2\lambda z = 0 \quad\text{——} ②$$
$$F_z = xy + 2\lambda y + 2\lambda x = 0 \quad\text{——} ③$$
$$F_\lambda = xy + 2zy + 2xz - 12 = 0 \quad\text{——} ④$$

Ⓐ ①× X ⟹ $xyz + \lambda xy + 2\lambda xz = 0$ ⎫
Ⓑ ②× y ⟹ $xyz + \lambda xy + 2\lambda yz = 0$ ⎭ ‒

⟹ Ⓐ-Ⓑ ⟹ $2\lambda xz - 2\lambda yz = 0$ ⟹ $x = y$

แทน $x = y$ ใน ③ ⟹ $x^2 + 2\lambda x + 2\lambda x = 0$ ⟹ $x^2 + 4\lambda x = 0$

⟹ $\lambda = -\dfrac{x}{4}$

แทน $\lambda = \dfrac{x}{4}$ ใน ② ⟹ $4xz + \left(\dfrac{x}{4}\right)x + 2\left(\dfrac{x}{4}\right)z = 0$

⟹ $z(4x - 2x) - x^2 = 0$ ⟹ $2xz = x^2$

⟹ $z = \dfrac{x}{2}$

กำหนดความสัมพันธ์ได้. $x = y$, $\lambda = -\dfrac{x}{4}$, $z = \dfrac{x}{2}$

แทน $(y = x)$, $z = \dfrac{x}{2}$ ใน ④   กำได.

$$\left[\; xy + 2zy + 2xz - 12 = 0 \qquad \text{——④}\; \right]$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2\left(\dfrac{x}{2}\right)(x) + 2x\left(\dfrac{x}{2}\right) - 12 = 0$

$\Rightarrow \qquad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow \; x = \pm 2.$

เนื่องจาก x เป็นความยาว เลือก $x = +2.$

กำได $y = x = +2$, $z = \dfrac{x}{2} = 1.$

ดังนั้น ปริมาตร มากสุด $= xyz = (2)(2)(1) = 4 \; m^3.$

พื้นที่ว. $xy + 2yz + 2xz = (2)(2) + 2(2)(1) + 2(2)(1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 4 + 4 + 4 = 12 \; m^2$ ∎