$\partial x \quad \partial y \quad \partial z \quad \partial y^2$

30/1/20.

30. พิจารณาสมการของวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย $V = IR$ เมื่อ V แทนค่าความต่างศักย์ (มีหน่วยเป็นโวลท์) I แทนกระแสในวงจร (มีหน่วยเป็นแอมแปร์) และ R แทนความต้านทาน (มีหน่วนเป็นโอห์ม) ถ้า V, I และ R มีการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับเวลา (t) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความต้านทานเทียบกับเวลา $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ เมื่อกำหนดให้ $R = 600$ โอห์ม $I = 0.4$ แอมแปร์ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์เทียบกับเวลา $\frac{dV}{dt} = -0.1$ โวล์ท/วินาที และอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสเทียบกับเวลา $\frac{dI}{dt} = -0.0005$ แอมแปร์/วินาที

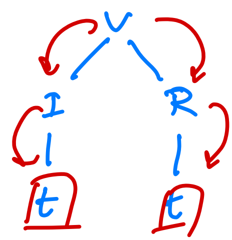
31. ให้ $w = t^2 \sin r + \ln s$, $r = \arctan(2x)$, $s = 2y + x^2$, $t = y^3\sqrt{x}$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

32. กำหนดให้ $\frac{x\sin(z)}{x+y} + y^2 = 10$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

33. ให้ $\tan(yz) + x^y = \ln(xy+z)$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

30: $V(t) = I(t)\cdot R(t)$ หา $\frac{dR}{dt}$ ให้ $R=600,\ I=0.4$

โดยกำหนด. $\frac{dV}{dt} = -0.1,\ \frac{dI}{dt} = -0.0005$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I}\cdot\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial I}(IR)\frac{dI}{dt} + \frac{\partial}{\partial R}(IR)\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dV}{dt}\right)\Bigg|_{\substack{R=600\\ I=0.4}} = \left(R\frac{dI}{dt} + I\frac{dR}{dt}\right)\Bigg|_{\substack{R=600\\ I=0.4}}$$

หา.

แทนค่า จากโจทย์.

$$-0.1 = (600)\cdot(-0.0005) + (0.4)\cdot\frac{dR}{dt}\Bigg|_{\substack{R=600\\ I=0.4}}$$

ย้ายข้าง.

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{-0.1+0.3}{0.4} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$$

w(t, r, s), r(x), s(y, x), t(y, x)

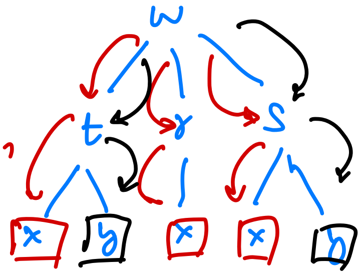
31. ให้ $w = t^2 \sin r + \ln s$, $r = \arctan(2x)$, $s = 2y + x^2$, $t = y^3\sqrt{x}$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

32. กำหนดให้ $\frac{x\sin(z)}{x+y} + y^2 = 10$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

33. ให้ $\tan(yz) + x^y = \ln(xy+z)$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

31.) • $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dx} + \frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}$

• $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}$



แทนค่า

• $w = t^2\sin r + \ln s \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = 2t\sin r$, $\frac{\partial w}{\partial r} = t^2\cos(r)$, $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{s}$

• $t = y^3\sqrt{x} \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot y^3$, $\frac{\partial t}{\partial y} = 3y^2\sqrt{x}$

• $s = 2y + x^2 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial s}{\partial y} = 2$

• $r = \arctan 2x \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{1}{(4x^2)+1}(2) = \frac{2}{4x^2+1}$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = (2t\sin r)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}y^3\right) + (t^2\cos r)\cdot\left(\frac{2}{4x^2+1}\right) + \left(\frac{1}{s}\right)(2x)$ ∎

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = (2t\sin r)(3y^2\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{s}\right)\cdot 2$ ∎

32. กำหนดให้ $\frac{x\sin(z)}{x+y} + y^2 = 10$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

33. ให้ $\tan(yz) + x^y = \ln(xy+z)$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

32.) $F(x,y,z) = 0 \rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z}$

$$F(x,y,z) = \frac{x \sin z}{x+y} + y^2 - 10 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x+y)\sin z - x \sin z\,(1)}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x \cos(z)}{x+y}$$

จะได้ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z} = -\left[\dfrac{(x+y)\sin z - x\sin z}{(x+y)^2}\right] \Big/ \left[\dfrac{x\cos(z)}{x+y}\right]$ #

- - - - - - - -

33.) $F(x,y,z) = \tan(yz) + x^y - \ln(xy+z) = 0$. หา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = yx^{(y-1)} - \dfrac{1}{(xy+z)} \cdot y$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y\sec^2(yz) - \frac{1}{(xy+z)}$$

ดังนั้น

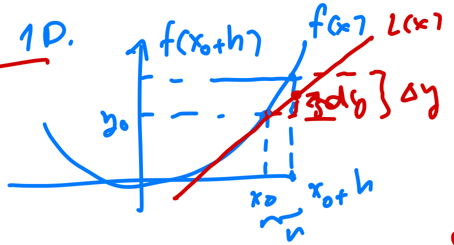
$\rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z} = \left[yx^{(y-1)} - \dfrac{y}{(xy+z)}\right] \Big/ \left[y\sec^2(yz) - \dfrac{1}{(xy+z)}\right]$ #

- - - - - - - -

หัวข้อถัดไป:

- ดิฟเฟอเรนเชียลรวม (Total diff.)

Idea: 1D.



ประมาณ Δy ด้วย dy

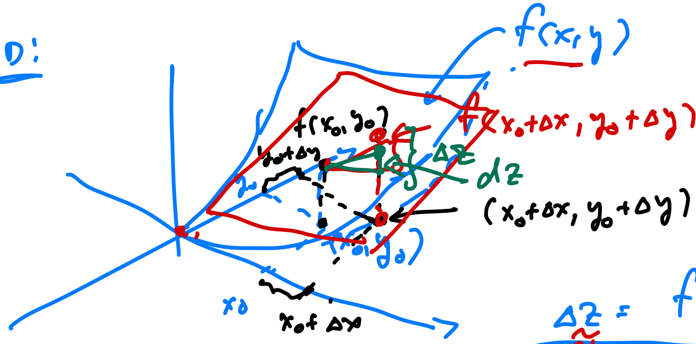
$\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$

$\approx$

$dy = f'(x_0)\,dx$, $dx = (x_0+h) - x_0 = h$

ดิฟเฟอเรนเชียล.

2D:



$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$$\approx$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\cancel{\partial t}} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{\cancel{dt}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{\cancel{dt}}$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy}$$

ดิฟเฟอเรนเชียลรวมของ z

สรุป: มีจุด (x_0,y_0) และจุดคลาดเคลื่อน $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

ต้องการหา $\Delta z = z(x_0,y_0) - z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

ประมาณโดย ดิฟเฟอเรนเชียลรวม.

$$\approx \quad dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot dy$$

โดยที่ $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$

Ex: กำหนด $z = f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$.

เปรียบเทียบ dz และ Δz เมื่อ (x,y) เปลี่ยนจาก

$(3,-1)$ เป็น $(2.96, -0.95)$

(x_0,y_0) $\quad$ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

หา $\Delta x, \Delta y$:

จาก. $x_0+\Delta x = 2.96$, $x_0 = 3 \Rightarrow \Delta x = 2.96 - 3 = -0.04$

$y_0 + \Delta y = -0.95$, $y_0 = -1 \Rightarrow \Delta y = -0.95 - (-1) = 0.05$

เปรียบเทียบ: $\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

$\left(f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2\right) = f(2.96, -0.95) - f(3,-1)$

$$= \left[(2.96)^2 - (2.96)\cdot(-0.95) + 3(0.95)^2\right] - \left[3^2 - (3)(-1) + 3(-1)^2\right]$$

$=$

เทียบ $\quad dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot dy \qquad \left(\begin{array}{l} dx = \Delta x = -0.04 \\ dy = \Delta y = 0.05 \end{array}\right)$

$$= (2x - y)\Big|_{(3,-1)} \cdot (-0.04) + (-x + 6y^2)\Big|_{(3,-1)} \cdot (0.05)$$

$$= (2\cdot 3 - (-1))\cdot(-0.04) + (-3 + 6(-1)^2)\cdot(0.05)$$

$$= (3.3)\cdot(-0.04) + (3)\cdot(0.05)$$

$$= -0.132 + 0.15 = 0.018 \qquad \blacksquare$$

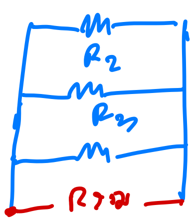
นอกจาก ใช้ dz แทน การประมาณ ข้อผิดพลาด จากการวัด.

→ ค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์: $\dfrac{dz}{z}$

→ ค่าความผิดพลาดร้อยละ $\dfrac{dz}{z} \times 100$

Ex: วงจรไฟฟ้า. R_1 , $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$.

ขนาน



ถ้าเครื่องมือวัดผิดพลาด 0.5%.

ค่าความต้านทานรวม จะผิดพลาดเท่าใด

$$\frac{1}{R_{\text{รวม}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$ หา $dR_{\text{รวม}} = ?$

ดิฟเฟอเรนเชียลรวม $$dR = \frac{\partial R}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} dR_2 + \frac{\partial R}{\partial R_3} dR_3$$

ข้อสังเกต

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3} \Rightarrow R = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

(ยาก.)

ใช้

Implicit diff: $$F(R, R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} = 0$$

- $$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{-F_{R_1}}{F_R} = \frac{-\left[+\frac{1}{R_1^2}\right]}{\left[-\frac{1}{R^2}\right]} = \frac{R^2}{R_1^2}$$
- $$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{-F_{R_2}}{F_R} = \frac{-\left[+\frac{1}{R_2^2}\right]}{\left[-\frac{1}{R^2}\right]} = \frac{R^2}{R_2^2}$$
- $$\frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{-F_{R_3}}{F_R} = \frac{-\left[+\frac{1}{R_3^2}\right]}{\left[-\frac{1}{R^2}\right]} = \frac{R^2}{R_3^2}$$

ดังนั้น $$dR = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot dR_1 + \frac{R^2}{R_2^2} \cdot dR_2 + \frac{R^2}{R_3^2} \cdot dR_3 \quad \text{—} (*)$$

โจทย์ให้ $$\frac{dR_1}{R_1} \times 100 = 0.5, \quad \frac{dR_2}{R_2} \times 100 = 0.5, \quad \frac{dR_3}{R_3} \times 100 = 0.5$$

จาก (*) $$dR \times 100 = \frac{R^2}{R_1}\underbrace{\left(\frac{dR_1}{R_1} \times 100\right)}_{0.5} + \frac{R^2}{R_2}\underbrace{\left(\frac{dR_2}{R_2} \times 100\right)}_{0.5} + \frac{R^2}{R_3}\underbrace{\left(\frac{dR_3}{R_3} \times 100\right)}_{0.5}$$

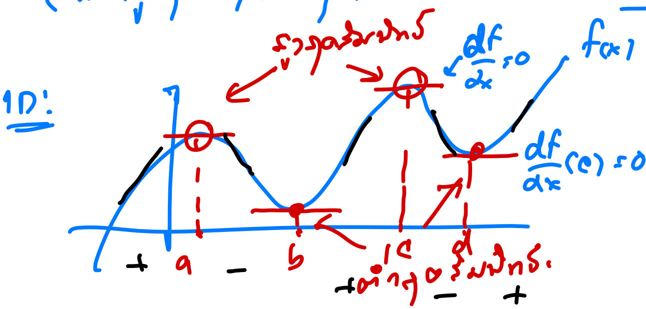
$$\Rightarrow \frac{dR \times 100}{R} = 0.5 \cdot R \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$= 0.5 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^2 = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50}\right)^2$$

⇒ ปัญหาค่าสุดขีด (Extreme values)

(ค่าสูงสุด / ต่ำสุด สัมพัทธ์ + อนุพันธ์)

1D:

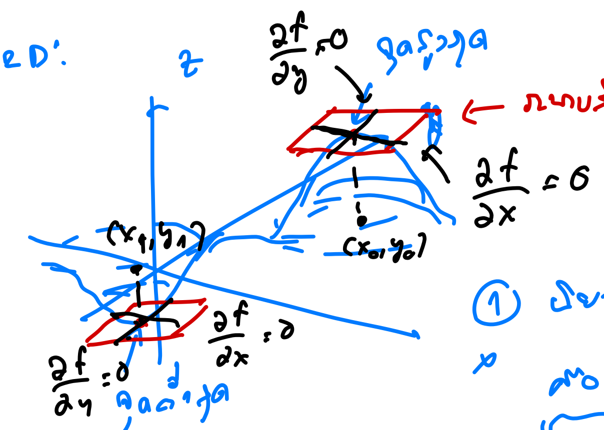


• จุดวิกฤต:
จุดที่ $f'(x) = 0$
หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้.

• จุดสูงสุด
(x เป็นจุดวิกฤต) → จุดสูงสุด : จุด x ที่ slope เปลี่ยน + → − $(f''(x) < 0)$

→ จุดต่ำสุด : จุด x ที่ slope เปลี่ยน − → + $(f''(x) > 0)$

2D:



$\left[\text{หรือ } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ และ } \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right]$

① นิยามจุดวิกฤต: (2D)

คือ จุด (x, y) ที่ทำให้

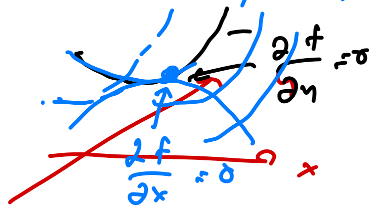
$$\rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 0 \quad \text{และ} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0}$$

② . check จุดสูงสุดต่ำสุด (อานม้า) : ให้ (x,y) เป็นจุดวิกฤต.

กำหนด $\boxed{D(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2}$

ถ้า

- $D>0$ — ต่ำสุด $f_{xx}>0$ (หรือ $f_{yy}>0$)
  สูงสุด $f_{xx}<0$ (หรือ $f_{yy}<0$)
- $D<0$ — เป็นจุดอานม้า.
- $D=0$ สรุปไม่ได้.



Ex: หาจุดสูงสุด/ต่ำสุด หรือ อานม้า (ถ้ามี) ของ

$$f(x,y) = 3y^2-2y^3-3x^2+6xy.$$

① หาจุดวิกฤต ต้องหาที่ $f_x=0$ และ $f_y=0$

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(3y^2-2y^3-3x^2+6xy) = -6x+6y = 0 & — ① \\ f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(3y^2-2y^3-3x^2+6xy) = 6y-6y^2+6x = 0 & — ② \end{cases}$$

จาก ① $\Rightarrow -6x+6y=0 \Rightarrow x=y$

แทนใน ② $\Rightarrow 6y-6y^2+(6y)=0 \Rightarrow -6y^2+12y=0$

$\Rightarrow -6y(y-2)=0 \Rightarrow y=0, 2.$

จาก ① $x = y$ จะได้ จุดวิกฤต.

- $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ จุด $(0,0)$ เป็นจุดวิกฤต.
- $y = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ จุด $(2,2)$ เป็นจุดวิกฤต.

$\Rightarrow$ check จุดวิกฤตว่าเป็น จุด สูงสุด/ต่ำสุด/อานม้า.

$$D(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

จาก. $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

$f_x = -6x + 6y \quad , \quad f_{xx} = -6$

$f_y = 6y - 6y^2 + 6x \quad , \quad f_{yy} = 6 - 12y$

$f_{xy} = 6$

จะได้ $D(x,y) = (-6)\cdot(6-12y) - (6)^2$

$$D \begin{cases} > 0 & \begin{cases} f_{xx} < 0 & \text{สูงสุด} \\ f_{xx} > 0 & \text{ต่ำสุด} \end{cases} \\ < 0 & \text{จุดอานม้า} \\ = 0 & \text{สรุปไม่ได้} \end{cases}$$

ที่จุดวิกฤต $(0,0)$, $(2,2)$ จะได้

- $D(0,0) = (-6)\cdot(6-\overset{0}{12\cdot 0}) - 6^2 < 0$

  ดังนั้น จุด $(0,0)$ เป็นจุดอานม้า.

- $D(2,2) = (-6)(6 - 12(2)) - 6^2 > 0$

  และ $f_{xx} = -6 < 0$

  ดังนั้น $(2,2)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์.