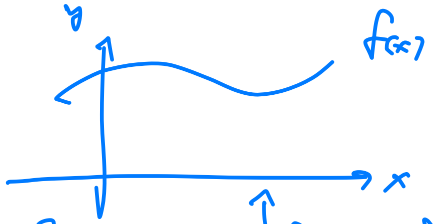
บทที่ 3: ฟังก์ชันหลายตัวแปร และอนุพันธ์ย่อย.

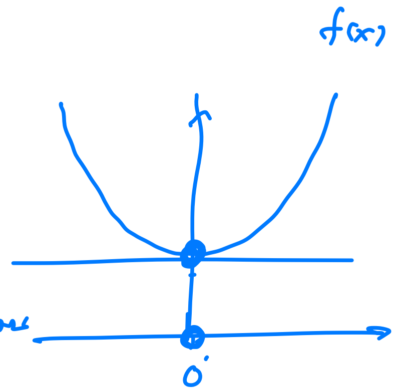
โดเมนของ f^n:

โดเมน 1D:



โดเมน 2D:

ตย: กราฟ $f(x) = \frac{x^3}{x} \overset{(!)}{=} x^2$



2D: $z = f(x,y) = \frac{x+y}{(x-1)}$

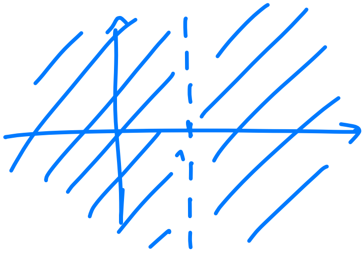
จงหา โดเมนของ $z = f(x,y)$

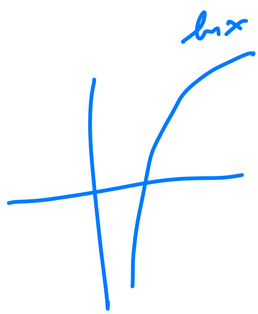
เฉลย: $D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x-1 \neq 0} \}$

$\Rightarrow x-1 = 0$

$x = 1$

ภาพ:





เงื่อนไขโดเมน:

- $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \Rightarrow g(x,y) \neq 0$
- $\ln(f(x,y)) \Rightarrow f(x,y) > 0$
- $\sqrt{f(x,y)} \Rightarrow f(x,y) \geq 0$
- $\left.\begin{array}{l} \arccos(f(x,y)) \\ \arcsin(f(x,y)) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq f(x,y) \leq 1$

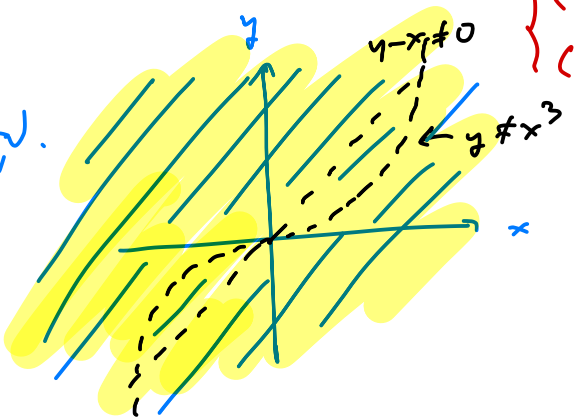
Ex: จงหา เขียนโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปเซต และวาดภาพ ของโดเมนนั้น.

1.) $f(x,y) = \dfrac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$

$$D_f := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-x)(y-x^3) \neq 0 \}$$

$\begin{cases} (y-x) \neq 0 \Rightarrow y-x=0 \Rightarrow y \cancel{=} x \\ (y-x^3) \neq 0 \Rightarrow y-x^3=0 \Rightarrow y \cancel{=} x^3 \end{cases}$

รูป.

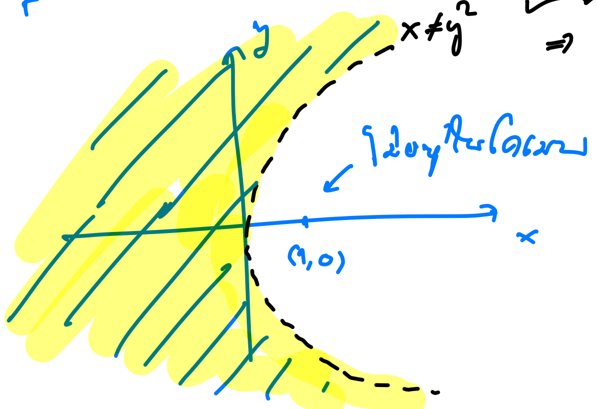


2.) $f(x,y) = x\ln(y^2-x)$

$$D_f := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y^2-x>0} \}$$

$\Rightarrow y^2-x=0 \Rightarrow x=y^2$

รูป:



① เขียนเส้นโค้งที่เกี่ยวข้อง (ค่า = ให้เขียนเส้นทึบ ≠ เขียนเส้นประ)

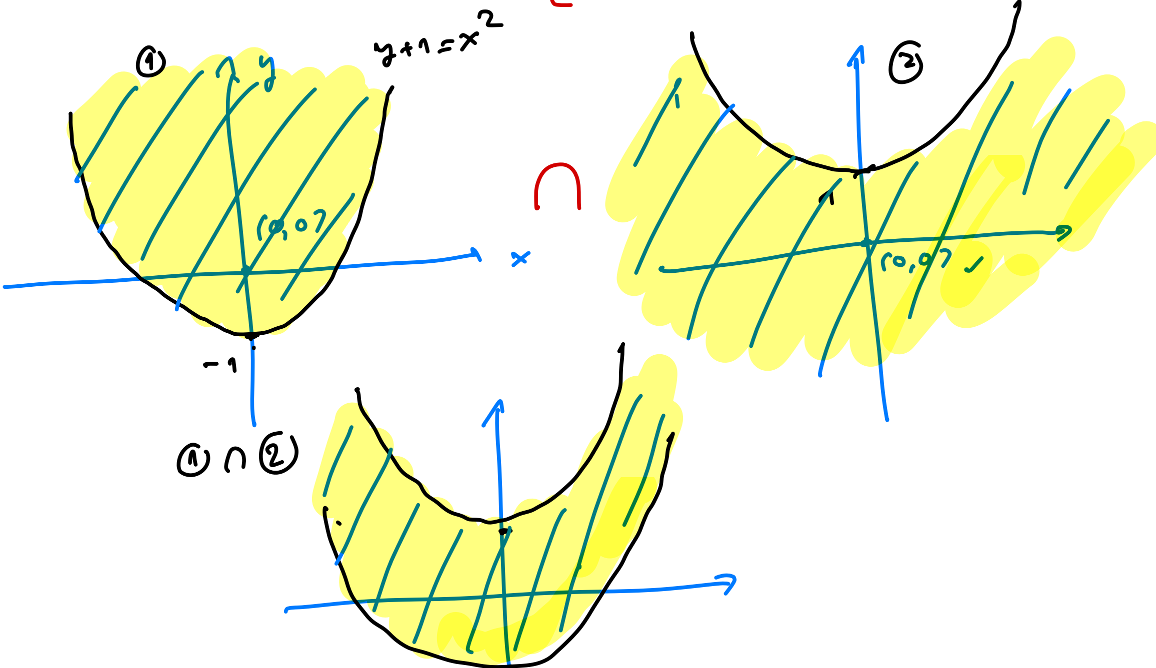
② สุ่มจุดแทนค่า ว่า ฝั่งไหนของกราฟอยู่ในโดเมน หรือไม่.

3.) $f(x,y) = \arccos(\underbrace{y-x^2}_{-1\leq f(x,y)\leq 1})$

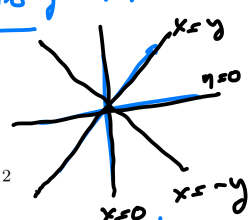
$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y - x^2 \le 1\}$

$$\left\{\begin{array}{ll} -1 \le y - x^2 \quad ① & \Rightarrow (y+1) = x^2 \\ \text{AND} & \\ y - x^2 \le 1 \quad ② & \Rightarrow (y-1) = x^2 \end{array}\right.$$

รูป:



จับคู่กราฟ: พิจารณาแกน x, y : แกน $x \Rightarrow y=0$, แกน $y \Rightarrow x=0$.



(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

(b) $f(x,y) = |xy|$

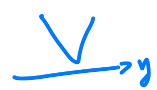
~~(c)~~ $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = (x^2-y^2)^2$

~~(e)~~ $f(x,y) = (x-y)^2$

(f) $f(x,y) = \sin(|x|+|y|)$.

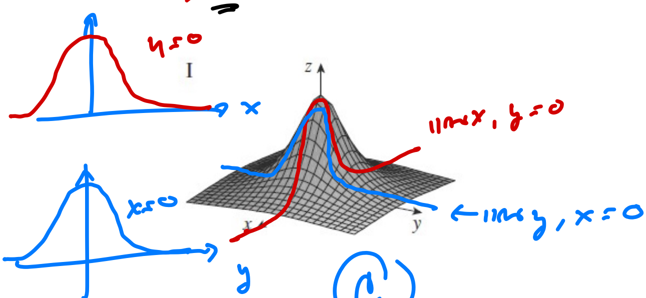
$|y|$

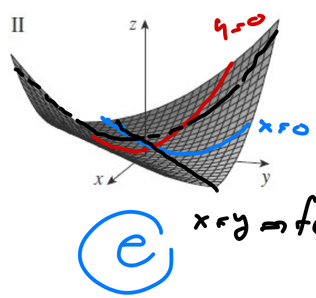


พิจารณาเส้นโค้งอื่น

: $x=y$

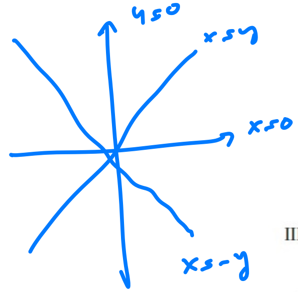
: $\boxed{x=-y}$





$x=y \Rightarrow f(x,y)=0$

โดเมน:



(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

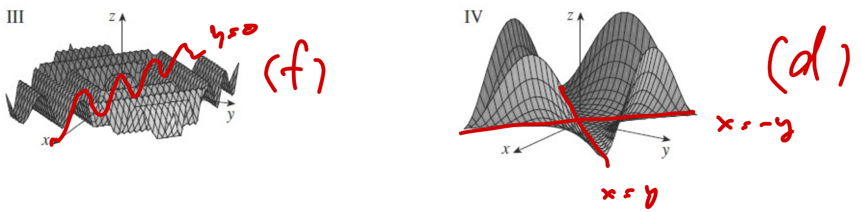
(b) $f(x,y) = |xy|$

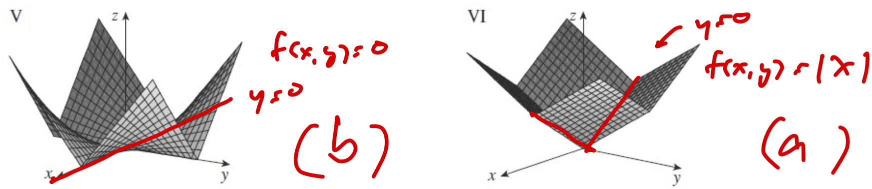
(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x,y) = (x-y)^2$

(f) $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$.



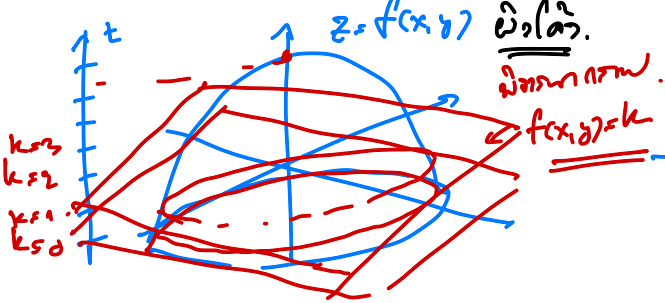


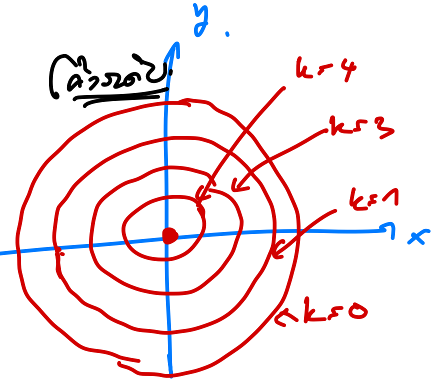
⇒ โดเมนของฟังก์ชันหลายตัวแปร (> 2)

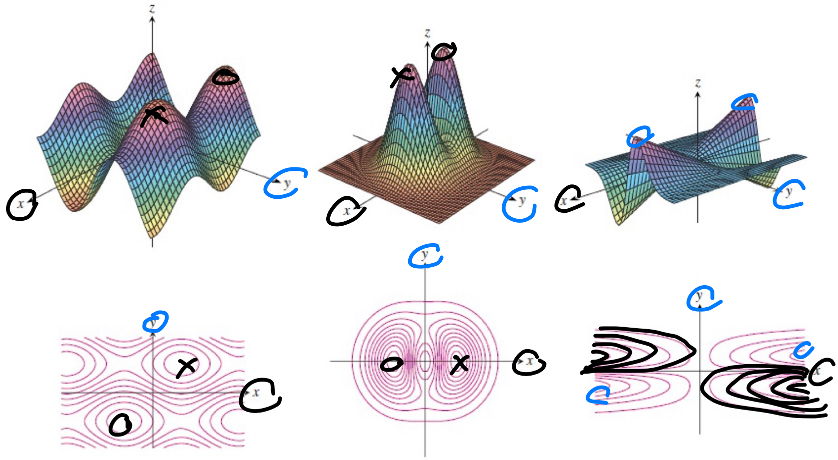
Ex: จงหาโดเมน. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ ≥ 0.

$$D_{f(x,y,z)} := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-x^2-y^2-z^2) \geq 0 \}$$

⇒ เส้นระดับ (Level curves)







(a) $z = \sin x + 2\sin y$ (b) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ (c) $z = xye^{-y^2}$

Ex: หา level curves ที่ $z = k$ ที่กำหนดให้

$f(x,y) = y - \ln x$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$

$k=-2$: $\boxed{f(x,y) = k}$

$\Rightarrow y - \ln x = -2$

$(y+2) = \ln x$

$k=-1$: $f(x,y) = -1$

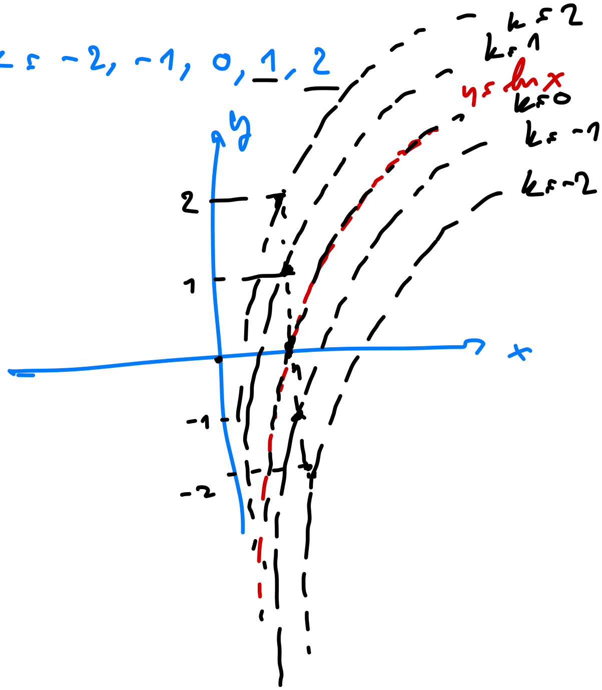
$\Rightarrow y - \ln x = -1$

$(y+1) = \ln x$

$k=0$: $f(x,y) = 0$

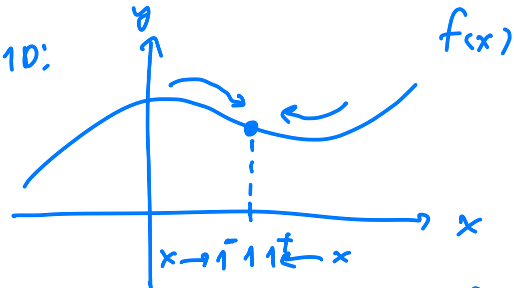
$\Rightarrow y - \ln x = 0$

$y = \ln x$

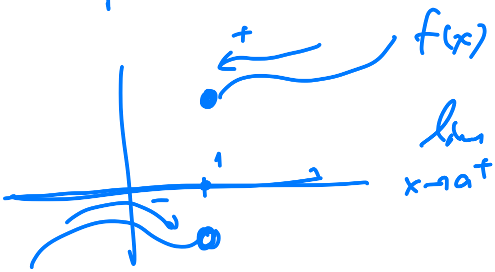


⇒ ลิมิตและความต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน (2 ตัวแปร)

1D:

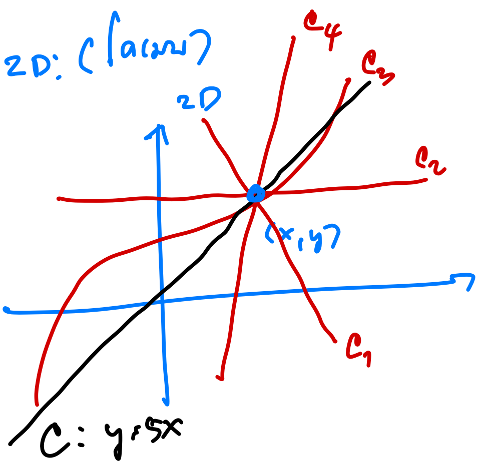


$$\lim_{x\to a} f(x) \checkmark \begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) \\ \qquad = \\ \lim_{x\to a^+} f(x) \end{cases}$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{f\to a^-} f(x)$$ ไม่มีลิมิต

2D: (ได้แนว)



ลิมิตตามเส้น ของ $f(x,y)$ ตามเส้นโค้ง C.

① เขียน $C(x,y)$ ในรูป $C(t)$

C: เส้นตรง $y = 5x$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5x = 5t \end{cases}$$

② เขียน $f(x,y)$ เป็น $f(x(t), y(t))$

เปลี่ยน 2 ตัวแปร → 1 ตัวแปร

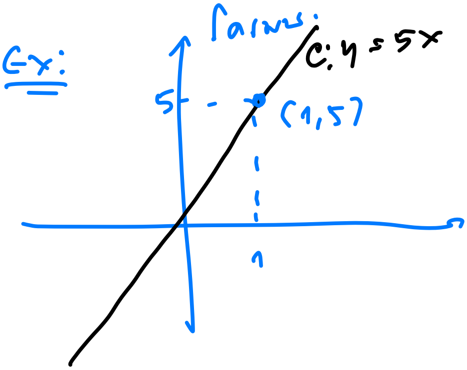
(x,y) $\qquad$ (t)

③ เขียนลิมิต ในรูป.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ตามเส้น } C}} f(x,y) = \lim_{\substack{[(x(t),y(t))\to(x(t_0),y(t_0)) \\ \text{ที่ } (x(t_0),y(t_0))=(a,b)] \\ t\to t_0}} f(x(t), y(t))$$

(แทนค่า) $$= \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$$

Ex:



ให้ $f(x,y) = x^2 y$

หา. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,5)} f(x,y)$ ตามเส้น $C : y = 5x$

① เขียน C ในรูป t

$$\boxed{C: \begin{cases} x = t \\ y = 5t \end{cases}}$$

② เขียน $f(x,y)$ ในรูป $f(x(t), y(t))$

$$f(x,y) = x^2 y \Rightarrow f(\underbrace{x(t)}_{=t}, \underbrace{y(t)}_{=5t}) = (t)^2 \cdot (5t)$$

ตามเส้น $C: \begin{cases} x = t \\ y = 5t \end{cases}$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 \cdot (5t) = 5t^3$$

③ เขียน lim ในรูป 1 ตัวแปร ตามเส้น C.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,5) \\ \text{ตามเส้น} \\ C: y=5x}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(x(t)))$$

$((x(t_0), y(t_0)) = (1,5))$ ✓

ดังนั้น $\boxed{t_0 = 1}$

(หา t_0: จาก. $x = t$, $y = 5t$ ได้ว่า $t_0 = 1$.)
$(x = 1, \; y = 5)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,5) \\ \text{ตามเส้น} \\ C: y=5x}} f(x,y) = \lim_{t\to 1} 5t^3 = 5 \quad \blacksquare$$

$f(x,y) = x^2 y$ แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(1,5)} f(x,y) = 1^2 \cdot 5 = 5$

Ex: $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ จงหา $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามเส้น } y=2x}} f(x,y)$

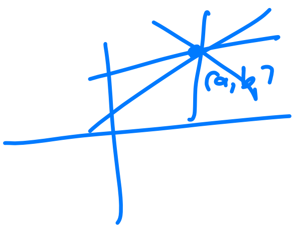
$\Rightarrow$ หาเส้นโค้งตามเส้น ! $C = y=2x$.

เขียน C ในรูปของ $c(t)$: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

$\Rightarrow$ เขียนเส้นโค้งในรูป 1 มิติ : $t_0 = 0 \Rightarrow c(0) = \begin{cases} x=0 & =0 \\ y=2(0)=0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามเส้น } y=2x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{(t)\cdot(2t)^2}{t^2+(2t)^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t^3}{t^2+16t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}(4t)}{\cancel{t^2}(1+16t^2)}$$



$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t}{1+16t^2} = 0$$

นิยาม: $f(x,y)$ จะต่อเนื่องที่จุด (a,b) ถ้า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ตามเส้น } C}} f(x,y) = f(a,b)$$ ทุก C ที่ผ่านจุด (a,b)