ตัวอย่าง: หาคำตอบ $y(x)$ ของ

1.) $8y'' - 10y' - 3y = 0$

2.) $3y'' - y' = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} y(0)=0,\ y(1)=1 & \text{(bnd. cond.)} \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 & \text{(init. cond.)} \end{array}\right.$$

ทบทวน: การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ในรูป.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(Homogeneous eq.)}$$

สมการช่วย $\Rightarrow$ $ar^2 + br + c = 0$

(สมมติ $y = e^{rx}$)

จาก. $\Rightarrow$ $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b^2-4ac > 0$: I $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$b^2-4ac = 0$: II $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

$b^2-4ac < 0$: III $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ $(\alpha \pm \beta i)$

Cases:

I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

II: $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

III: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ $(r = \alpha \pm \beta i)$

คำตอบทั่วไป $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

$y = c_1 e^{rx} + c_2 \underline{x} e^{rx}$

$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$

1.) $8y'' - 10y' - 3y = 0$

$\Rightarrow$ สมการช่วย $8r^2 - 10r - 3 = 0$

จาก. $r = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 4\cdot 24}}{16}$

$= \dfrac{10 \pm \sqrt{196}}{16} = \dfrac{10 \pm 14}{16}$

$\Rightarrow r_1 = \dfrac{\cancel{24}\,3}{\cancel{16}\,2},\ r_2 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

case I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$.

$y(x) = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{4}x}$

2.) $3y'' - y' = 0$ $\begin{cases} y(0)=0,\ y(1)=1 & \text{①} \ (\text{bnd. cond.}) \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 & \text{②} \ (\text{init. cond.}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ หา คำตอบทั่วไป.

case I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

สมการช่วย $3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(3r-1) = 0 \Rightarrow r = 0, \frac{1}{3}$

คำตอบทั่วไป. $y(x) = c_1 \cancel{e^{0x}}^{\,1} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{3}x}$

(bnd. cond.)

①: คำตอบเฉพาะกรณี $y(0)=0,\ y(1)=1$

แทนค่า $y(0)=0$: $y(0) = 0 = c_1 + c_2 \cancel{e^{\frac{1}{3}(0)}}^{\,1}$ —— (1)
$(x=0, y=0)$

แทนค่า $y(1)=1$: $y(1) = 1 = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{3}(1)}$ —— (2)
$(x=1, y=1)$

หา c_1, c_2 : (2)-(1) $\Rightarrow 1 = c_2\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}} - 1}$

แทนใน (1) $\Rightarrow c_1 = -c_2 = -\dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}} - 1}$

$\therefore$ คำตอบทั่วไป $y(x) = \left(-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}} - 1}\right) + \left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}} - 1}\right) e^{\frac{1}{3}x}$ $\blacksquare$

(init. cond.)

②: $y(0)=0,\ y'(0)=1$ (init. cond.)

คำตอบทั่วไป $y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow y'(x) = 0 + \frac{c_2}{3} e^{\frac{1}{3}x}$

$y(0)=0 : \Rightarrow$ $y(0) = 0 = c_1 + c_2 \cancel{e^{\frac{1}{3}(0)}}^{\,1}$ —— (1) $\Rightarrow c_1 = -c_2 = -3$

$y'(0)=1 : \Rightarrow$ $y'(0) = 1 = 0 + \frac{c_2}{3} \cancel{e^{\frac{1}{3}(0)}}^{\,1}$ —— (2) $\Rightarrow c_2 = 3$

คำตอบเฉพาะ : $y(x) = (-3) + (3)e^{\frac{1}{3}x}$ ☒

⇒ แสดง Case II : $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

คำตอบทั่วไป $y(x) = c_1 \underbrace{e^{rx}}_{y_1} + c_2 \underbrace{xe^{rx}}_{y_2}$

ต้องแสดง $y_2 = x e^{rx} = x y_1$

เป็นคำตอบของ $\xrightarrow{\text{แทน}}$ $ay'' + by' + cy = 0$ ที่มีราก $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(**)$ $\quad 0$

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

พ. $y_2 = x y_1$

$y_2' = x y_1' + y_1$

$y_2'' = x y_1'' + 2y_1'$

แทนใน $(**)$ ⇒ $a\overbrace{(xy_1''+2y_1')}^{y_2''} + b\overbrace{(xy_1'+y_1)}^{y_2'} + c\overbrace{(xy_1)}^{y_2}$

$$= \underbrace{x(ay_1''+by_1'+cy_1)}_{=0\ (y_1 \text{ เป็นคำตอบของสมการ})} + (2a\underbrace{y_1'}_{=re^{rx} = \left(\frac{-b}{2a}\right)e^{rx}} + b\underbrace{y_1}_{=e^{rx}})$$

$$= 0 + \left(\cancel{2a}\left(\frac{-b}{\cancel{2a}}\right)\cdot e^{rx} + b e^{rx}\right) = 0$$ ☒

$\therefore$ $y_2(x) = x y_1 = x e^{rx}$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ.

⇒ $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{rx} + c_2 \underline{\underline{xe^{rx}}}$ เป็นคำตอบทั่วไปของ Case II :

case III: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$, $r = \alpha \pm \beta i$

แล้วคำตอบทั่วไปอยู่ในรูป $y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)$

สมมติ $y = e^{rx} = e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x \pm i\beta x} = \underbrace{e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta x}}_{\text{Euler}}$, $\beta x = \theta$

$$(\text{Euler}) = e^{\alpha x}\cdot\left(\cos(\beta x) \pm i\sin(\beta x)\right) \qquad \left(e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)\right)$$

เริ่มต้น กรณี $r_1 = (\alpha + \beta i)x$

ได้คำตอบ $Y_1(x) = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$

กรณี $r_2 = (\alpha - \beta i)x$

คำตอบ $Y_2(x) = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$

พิจารณาให้ $y_1(x) = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(Y_1 - Y_2) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

จาก. $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$$= c_1\left(e^{\alpha x}\cos(\beta x)\right) + c_2\left(e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right) \qquad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ Non-Homogeneous eq!

รูป. $ay'' + by' + cy = G(x) \neq 0$

Idea: รูปทั่วไปของคำตอบ อยู่ในรูป.

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

คำตอบของ Homg. ($ay'' + by' + cy = 0$)

คำตอบเฉพาะ ตัวหนึ่ง!

ที่รองรับ $\underbrace{ay_p'' + by_p' + cy_p = G(x)}_{\text{เงื่อนไข}}$

ทำไมถึงสามารถ เขียนในรูปนี้ได้?:

แทน $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ใน. $ay'' + by' + cy = G(x)$

$$\Rightarrow a\left(y_h(x) + y_p(x)\right)'' + b\left(y_h(x) + y_p(x)\right)' + c\left(y_h(x) + y_p(x)\right)$$

$$= \underbrace{\left(ay_h'' + by_h' + cy_h\right)}_{y_h \text{ เป็นคำตอบของ Hom.}} + a\left(y_p'' + by_p' + cy_p\right)$$

เงื่อนไขของ y_p.

$$= 0 + G(x)$$

หา y_p อย่างไร!

Ex: $y'' - 2y' = \underbrace{e^{3x}}_{G(x) \neq 0}$

เรารู้ว่า. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

① คำตอบ Hom. ($y'' - 2y' = 0$)

② ตัวหนึ่ง ที่รองรับ ($y_p'' - 2y_p' = e^{3x}$)

①: หา y_h : คำตอบของ $y''-2y'=0$

สมการช่วย $r^2-2r=0 \rightarrow r(r-2)=0 \rightarrow r_1=0,\ r_2=2$

คำตอบทั่วไป $y_h(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{2x} = c_1+c_2e^{2x}$ ✓

② หา y_p: ขึ้นอยู่กับ $G(x)=e^{3x}$

รูปแบบ: $y_p(x) = A_1e^{3x}$ ← unknown. ที่สอดคล้อง $\underbrace{y_p''-2y_p'=e^{3x}}_{(*)}$

หา A_1: $y_p'(x) = 3A_1e^{3x}$

$y_p''(x) = 9A_1e^{3x}$

แทนในสมการ (*) $\Rightarrow (9A_1e^{3x})-2(3A_1e^{3x}) = e^{3x}$

$\Rightarrow (9A_1-6A_1)\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}\ 1$

$\Rightarrow 3A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3}$

ดังนั้น $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

$\therefore\ y(x) = y_h(x)+y_p(x) = \underbrace{(c_1+c_2e^{2x})}_{y_h(x)} + \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_{y_p(x)}$

รูปแบบคำตอบ!

ตารางรูปแบบ $y_p(x)$ จะขึ้นอยู่กับ $G(x)$

	$G(x)$	รูปแบบ $y_p(x)$	
expo:	ce^{kx}	$y_p(x) = A_1e^{kx}$	unknown 1 ตัว.

polyn: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; $y_p(x) = \underline{A_n} x^n + \underline{A_{n-1}} x^{n-1} + \dots + A_1 x + \underline{A_0}$

unknowns $n+1$ ตัว.

Ex: $G(x) = 5 \xRightarrow{\text{รูปแบบ}} y_p(x) = A_0$

$G(x) = x^1 + 0 \Rightarrow y_p(x) = \underline{A_1} x + \underline{A_0}$

$G(x) = x^2 \Rightarrow y_p(x) = \underline{A_2} x^2 + \underline{A_1} x + \underline{A_0}$

sin/cos:

$$\left.\begin{aligned} &c \sin(kx) \\ &c \cos(kx) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{รูปแบบ}} y_p(x) = \underline{A_1} \cos(kx) + \underline{A_2} \sin(kx)$$

2 unknowns.

Ex: $G(x) = 2\sin(\pi x) \xRightarrow{\text{รูปแบบ}} y_p(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \cos(\pi x)$

$G(x) = \cos(\underline{2x}) + 5\sin(\underline{2x}) \Rightarrow y_p(x) = A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x)$

รวมกัน: • ถ้า $G(x) = f(x) \pm g(x)$

รูปแบบ. $y_p(x) = y_p^f(x) \pm y_p^g(x)$

Ex: $G(x) = \underbrace{e^{3x}}_{f(x)} + \underbrace{3x^2}_{g(x)}$

รูปแบบ. $y_p(x) = \underbrace{(A_1 e^{3x})}_{y_p^f} + \underbrace{(B_2 x^2 + B_1 x + B_0)}_{y_p^g}$

• ถ้า $G(x) = f(x) \cdot g(x)$

รูปแบบ. $y_p(x) = y_p^f(x) \cdot y_p^g(x)$

Ex: $G(x) = (3x^2) \cdot (e^{3x})$

รูปแบบ. $y_p(x) = (A_2 x^2 + A_1 x + A_2) \cdot (B_1 e^{3x})$

(จำ! unk. unk = unk.)
unk ± unk = unk.)

$$= (\underbrace{A_2 B_1}_{C_1} x^2 + \underbrace{A_1 B_1}_{C_2} x + \underbrace{A_2 B_1}_{C_3}) e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = (\underline{C_1} x^2 + \underline{C_2} x + \underline{C_3}) e^{3x}$$ 3 unks.

Ex: จงหารูปแบบ $y_p(x)$ ของสมการ Non-Homogeneous eq:

1.) $y'' + 3y' - 2y = x^2 \leftarrow G(x) = x^2$

รูปแบบ: $y_p(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ (3 unknowns)

2.) $y'' + y' - 2y = \sin x \leftarrow G(x) = \sin(x)$

รูปแบบ: $y_p(x) = A_1 \sin(x) + A_2 \cos(x)$ (2 unknowns)

3.) $y'' - 4y = xe^x + \cos(2x) \leftarrow G(x)$

รูปแบบ: $y_p(x) = (A_1 x + A_0) e^x + (B_1 \sin(2x) + B_2 \cos(2x))$

Ex: จงหาคำตอบทั่วไปของ $y'' + 3y' - 2y = \underset{G(x)}{x^2}$

คำตอบทั่วไปอยู่ในรูป $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$\nearrow$ คำตอบของ Hom. $(y''+3y'-2y=0)$

$\nwarrow$ (รูปแบบที่ขึ้นกับ $G(x)$) ต้องหา ที่สอดคล้อง $(y_p''+3y_p'-2y_p=x^2)$

$\Rightarrow$ หา $y_h(x)$: คำตอบของ $y''-3y'-2y=0$

สมการช่วย: $r^2-3r-2=0$

จาก. $r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$r_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}, \quad r_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

ดังนั้น $y_h(x) = C_1 e^{\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)x}$

$\Rightarrow$ หา $y_p(x)$: ขึ้นอยู่กับ $G(x) = x^2$

ที่สอดคล้อง $y_p''-3y_p'-2y_p = x^2$ —— $(*)$

(3 unks)

รูปแบบ $y_p(x) = A_2x^2+A_1x+A_0$

$y_p'(x) = 2A_2x+A_1$

$y_p''(x) = 2A_2$

แทนใน $(*)$ จะได้

$$\underbrace{(2A_2)}_{y_p''} - 3\underbrace{(2A_2x+A_1)}_{y_p'} - 2\underbrace{(A_2x^2+A_1x+A_0)}_{y_p} = x^2 + 0x + 0$$

$$\rightarrow \quad x^2\underbrace{(-2A_2)}_{=1} + x\underbrace{(-6A_2-2A_1)}_{=0} + \underbrace{(2A_2-3A_1-2A_0)}_{=0} = x^2 + 0x + 0$$

เทียบ สปส: ได้ระบบสมการ

① $-2A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$

② $-6A_2 - 2A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -3A_2 = \frac{3}{2}$

③ $2A_2 - 3A_1 - 2A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = A_2 - \frac{3}{2}A_1$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-10}{2} = -5$$

จะได้ $A_0 = -5$, $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)x + (-5)$

$\therefore \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \ldots$ $\boxtimes$

การบ้าน: หาคำตอบทั่วไปของ.

1.) $y'' + 4y = e^{3x}$

2.) $y'' + y = \sin x$.