ทบทวน: บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 $F(x, y, y') = 0$

$\Rightarrow y'(x) = f(x,y)$ — $g(x) . h(y)$

- แบบแยกตัวแปรได้

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \overbrace{g(x) . h(y)}^{f(x,y)}$$

ย้ายข้างสมการ. $$\boxed{\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)\, dx}$$

ตัวอย่าง: กฎการเย็นตัวของ Newton.

- แบบสมการเชิงเส้น. คือ $F(x, y, y') = 0$

เขียนได้ในรูป. $$\boxed{y' + P(x) y = Q(x)}$$ รูปแบบทั่วไป.

$\Rightarrow$ หา $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$

คูณตลอด $$\underbrace{\mu(x) \left(y' + P(x) y \right)} = \mu(x) Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\mu(x) . y \right) = \mu(x) Q(x)$$

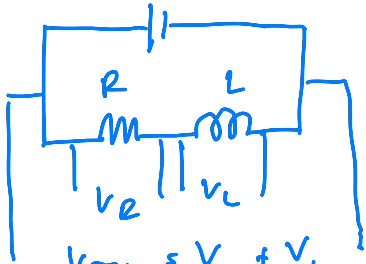
ย้ายข้าง. $$\int 1\, d(\mu(x) . y) = \int \mu(x) Q(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) Q(x)\, dx}$$ รูปแบบคำตอบ

ภาคประยุกต์: สมการเชิงอนุพันธ์ รูปแบบเชิงเส้น.

$V = V_{รวม}$ คงที่.

1.7 วงจร RL



ความสัมพันธ์.

$$\begin{cases} V_R = IR \\ V_L = L \cdot \dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$

$V_{รวม} = V_R + V_L$

$$\Rightarrow \quad V_{รวม} = V_R + V_L$$

$$\Rightarrow \quad V_{รวม} = IR + L\frac{dI}{dt}$$

จะได้สมการในรูป. $$\boxed{\frac{dI}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{P(t)} I = \underbrace{\frac{V_{รวม}}{L}}_{Q(t)},}$$ สมการเชิงเส้น

$$\Rightarrow \text{จะได้} \quad I(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) Q(t)\, dt$$

โดยที่ $p(t) = \dfrac{R}{L}$, $Q(t) = \dfrac{V}{L}$,

$$\mu(\,) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{Rt}{L}}$$

$u = \dfrac{Rt}{L}$, $du = \dfrac{R}{L} dt$

$dt = \dfrac{L\,du}{R}$

จะได้: $$I(t) = e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} \frac{V}{L}\, dt$$

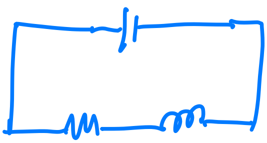
$$= e^{-\frac{Rt}{L}} \left[\frac{V}{L} \int e^{u} \frac{L}{R} du \right]$$

$$= e^{-\frac{Rt}{L}}\left[\frac{V}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{R}\left(e^{\frac{Rt}{L}} + c\right)\right]$$

ดังนั้น $$\boxed{I(t) = \frac{V}{R}\left[1 + c e^{-\frac{Rt}{L}}\right]}$$

Ex: วงจร RL

$V = 60V.$



$R = 12\,\Omega$ $\quad L = 4$ Henry.

$(t=0, I=0)$

$I(t=0) = 0$

a.) หากระแสในวงจร ที่เวลาใดๆ ถ้าที่เริ่มต้นไม่มีกระแสในวงจรเลย

$$I(t) = \frac{V}{R}\left[1 + c e^{-\frac{Rt}{L}}\right]$$ โดยที่ $R = 12$, $L = 4$, $V = 60$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{\cancel{60}^{5}}{\cancel{12}}\left[1 + c e^{-\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}}t}\right]$$

หา c จากเงื่อนไข. $I(0) = 0$ $(t=0, I=0)$ จริง?

$$I(0) = 0 = 5\left[1 + c e^{0}\right] \Rightarrow c = -1$$

$$\therefore I(t) = 5\left[1 - e^{-3t}\right]$$

b.) จงหา I ที่เวลาผ่านไป 1 วินาที.

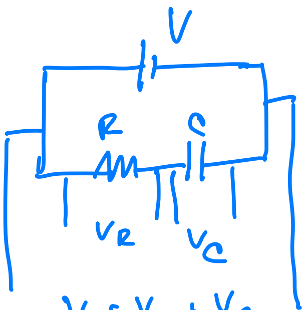
ตอบ. $I(t=1) = 5\left[1 - e^{-3(1)}\right]$

c.) จงหากระแสในวงจรเมื่อเวลาผ่านไปมากๆ. $(t \to \infty)$

ฯ. $\lim_{t \to \infty} (I(t)) = \lim_{t \to \infty} \left(5\left[1 - \underbrace{e^{-3t}}_{\to 0}\right] \right)$ $\quad e^{-3t} \to \frac{1}{e^{3t}} \to 0$

$$= 5 \text{ Amp} \quad \blacksquare$$

⇒ วงจร RC :



$V = V_R + V_C$

ความสัมพันธ์:

$$V_R = IR = \frac{dQ}{dt} R$$

$$V_C = \frac{Q(t)}{C}$$

เนื่องจาก I และ Q มีความสัมพันธ์ $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$

ดังนั้น. $V = V_R + V_C = \dfrac{dQ}{dt} R + \dfrac{Q}{C}$

จะได้สมการเชิงเส้นในรูป.

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{p(t)} Q = \underbrace{\frac{V}{R}}_{\tilde{Q}(t)}}$$

จากสูตร $\quad Q(t) = \dfrac{1}{\mu(t)} \displaystyle\int \mu(t) \tilde{Q}(t)\, dt$

เนื่องจาก. $p(t) = \dfrac{1}{RC}, \quad \tilde{Q}(t) = \dfrac{V}{R}$

และ $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}$ $\quad u = \dfrac{t}{RC} \Rightarrow dt = du \cdot RC$

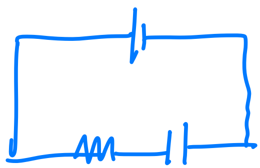
ดังนั้น $\quad Q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \displaystyle\int e^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{V}{R}\, dt$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{V}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}C\left(e^{\frac{t}{RC}} + k\right)\right]$$

ดังนั้น $$\boxed{Q(t) = VC\left[1 + k e^{-\frac{t}{RC}}\right]}$$ ∎

Ex: วงจร RC

$V = 60\,V$



$Q(0) = 0$ $R = 5\,\Omega$ $C = 0.05\,F$

กำหนดให้ ที่เวลาเริ่มต้น ไม่มีประจุในวงจรเลย จงหา $Q(t)$ ที่ t ใดๆ

จาก. $$Q(t) = VC\left[1 + K e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$, $R = 5$, $C = 0.05$, $V = 60$

ดังนั้น $$Q(t) = \cancel{60}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{100}}\left[1 + K e^{-\frac{t\cdot 100}{5\cdot 5}}\right]$$

$$Q(t) = 3\left[1 + K e^{-4t}\right]$$

ที่ $t = 0$ ดังนั้น $Q(0) = 0$

$$\Rightarrow Q(0) = 0 = 3\left[1 + K e^{-4(0)}\right] \Rightarrow K = -1$$

ดังนั้น $$Q(t) = 3\left[1 - e^{-4t}\right]$$ ∎

ບົດທີ 2: ສົມຜົນເຊີງອະນຸພັນ ເຊີງເສັ້ນ ອັນດັບ 2 & ການແປງລາປລາສ

⇒ ອັນດັບ 1 : $F(x, y, y') = 0$

⇒ ອັນດັບ 2 : $F(x, y, y', y'') = 0$ ຮູບແບບທົ່ວໄປ ໃນຮູບ Implicit

ເຊີງເສັ້ນ ອັນດັບ 2

$$\boxed{P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y = G(x)}$$

ເຮົາຮຽນໃນກໍລະນີທີ່ $P(x) = a$, $Q(x) = b$, $R(x) = c$ ເປັນຄ່າຄົງທີ່

ຈະໄດ້:

$$\boxed{ay''(x) + by'(x) + cy = G(x)} \begin{cases} = 0 & \text{Homogeneous eq.} \\ \neq 0 & \text{Non-Homog.} \end{cases}$$

ແບ່ງເປັນ 2 ສ່ວນ:

1.) Homogeneous eq: $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$ — ສ1

2.) Non-Homogeneous eq: $ay'' + by' + cy = G(x) \neq 0$.

⇒ ເທັກນິກການແກ້ Homogeneous eq:

ສົມມຸດ ສົມຜົນມີຄຳຕອບ ໃນຮູບ.

$$y(x) = e^{rx}$$
$$y'(x) = re^{rx}$$
$$y''(x) = r^2 e^{rx}$$

ຈະໄດ້

Idea: ຫາ fn ທີ່ $y' = y$ ⇒ $y = e^x$

ແທນໃສ່ ສົມຜົນ. $ay'' + by' + cy = 0$

จะได้: $a(r^2e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{e^{rx}}}_{>0}\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{\text{สมการช่วย}} = 0$$

สมการช่วย (เงื่อนไขที่ทำให้ $y = e^{rx}$ เป็นคำตอบของสมการ.)

$\therefore$ r ที่เป็นรากของสมการช่วย $ar^2 + br + c = 0$

จะทำให้ $y = e^{rx}$ เป็นคำตอบของสมการ.

จาก $\Rightarrow$ $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$b^2-4ac \begin{cases} > 0, & \to r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{(I)} \\ = 0, & \to r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{(II)} \\ < 0 & \to r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

(I). กรณี $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$:

คำตอบ: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$

รูปทั่วไป. $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ← superposition sol$^{\underline{n}}$.

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

Ex: จงหาคำตอบของ $y'' - y' - 6y = 0$.

สมมติ. $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

แทนค่า $(r^2 e^{rx}) - (re^{rx}) - 6e^{rx} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{e^{rx}}}_{\neq 0}(r^2 - r - 6) = 0$$

ความเข้าใจ.

⇒ สมการช่วย $\quad r^2 - r - 6 = 0$

$$(r-3)(r+2) = 0$$

หาราก. $\quad r = 3, -2, \Rightarrow r_1 = 3, \; r_2 = -2$

ดังนั้น. $\quad y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-2x}$ เป็นคำตอบของสมการ. $\quad y'' - y' - 6y = 0$

check: $\quad y_1 = e^{3x}, \; y_1' = 3e^{3x}, \; y_1'' = 9e^{3x}$

แทนค่า $\quad (9e^{3x}) - (3e^{3x}) - 6(e^{3x})$

$$= e^{3x}(\underbrace{9-3-6}_{=0}) = 0$$

$\therefore y_1$ เป็นคำตอบ

ในทำนองเดียวกันกับ $\quad y_2 = e^{-2x}, \; y_2' = -2e^{-2x}, \; y_2'' = 4e^{-2x}$

แทนค่า. $\quad (4e^{-2x}) - (-2e^{-2x}) - 6(e^{-2x})$

$$= e^{-2x}(\underbrace{4+2-6}_{=0}) = 0$$

$\therefore y_2$ เป็นคำตอบ.

$\therefore$ คำตอบทั่วไป อยู่ในรูป

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Ex: สมการ. $\quad y'' + 4y' + 4y = 0.$ $\quad$ (Idea: สมมติ $y = e^{rx}$ เป็นคำตอบ)

สมการช่วย $\quad r^2 + 4r + 4 = 0$

$$(r+2)^2 = 0$$

ราก

$r_1 = r_2 = -2$ $\quad$ อยู่ในรูปแบบ II $\quad r_1 = r_2 \in \mathbb{R}.$

Ex: สมการ: $y'' - 4y' + 5y = 0$

สมการช่วย $r^2 - 4r + 5 = 0$

ราก. $r = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\Rightarrow r = 2 \pm i \Rightarrow$ รูปแบบ III $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ รูปแบบคำตอบทั่วไป

คำตอบทั่วไป $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

I $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$	$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
II $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$	$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
III $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ ($r = \alpha \pm \beta i$)	$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$

Ex:

① $\Rightarrow y'' - y' - 6y = 0$ (สมการช่วย $r^2 - r - 6 = 0$
ราก. $r_1 = 3$, $r_2 = -2$, case I $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$,)

คำตอบทั่วไปคือ $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$ ∎

② $\Rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0$ สมการช่วย $r^2 + 4r + 4 = 0$

ราก. $r = r_1 = r_2 = -2$, case II $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$

คำตอบทั่วไปคือ $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ ∎

③ $\Rightarrow y'' - 4y' + 5y = 0$ สมการช่วย $r^2 - 4r + 5 = 0$

ราก. $r = 2 \pm 1i$ case III $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$

$\alpha = 2 \quad \beta = 1$

คำตอบทั่วไปคือ $y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x)\right)$ #

(ผลเฉลย)

$\Rightarrow$ คำตอบเฉพาะ (หา c_1, c_2) จาก คำตอบทั่วไป.

1. ปัญหาค่าเริ่มต้น. (initial cond.) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, โดยที่ x_0, y_0, y_0' คท.

Ex: $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

2) ปัญหาค่าขอบ (boundary cond.) $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, โดยที่ x_0, x_1, y_0, y_1 คท.

Ex: $y(0) = 0$
$y(1) = 1$

Ex: จงแก้ปัญหาค่าขอบ ของ

$$y'' - 5y' = 0 \quad \text{โดยที่} \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

หาคำตอบทั่วไป: สมการช่วย $r^2 - 5r = 0$ case I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$r(r-5) = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 5$

คำตอบทั่วไป $y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{5x}$ ($e^{0x} = 1$)

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{5x}}$$

คำตอบเฉพาะ: หา c_1, c_2 จาก เงื่อนไขขอบ $y(0) = 0,\ y(1) = 1$

$y(0)=0$: แทน. $\quad 0 = C_1 + C_2 e^{5\cdot(0)} \to 1 \quad$ —— ①

$(x=0,\ y=0)$

$y(1)=1$: แทน $\quad 1 = C_1 + C_2 e^{5(1)} \quad$ —— ②

$(x=1,\ y=1)$

แก้ระบบสมการ.

$\Rightarrow$ ② - ① $\Rightarrow 1 = C_2 (e^5 - 1)$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{e^5 - 1}$$

แทนใน ① $\Rightarrow C_1 = -C_2 = -\frac{1}{e^5-1}$

$\therefore$ คำตอบเฉพาะคือ

$$y(x) = \left(-\frac{1}{e^5-1}\right) + \left(\frac{1}{e^5-1}\right) e^{5x} \quad \#$$

ลองทำ: หาคำตอบ $y(x)$ ของ

1.) $8y'' - 10y' - 3y = 0$

2.) $3y'' - y' = 0$

$$\begin{cases} y(0)=0,\ y(1)=1 & \text{(bnd. cond.)} \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 & \text{(init. cond.)} \end{cases}$$