นิยาม: ให้ $y(x)$ ที่สอดคล้องกับ.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y), & \text{— สมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 1.} \Rightarrow \text{คำตอบทั่วไป (มีค่า } C\text{)} \\ y(x_0) = y_0 & \text{— เงื่อนไขเริ่มต้น.} \Rightarrow \text{คำตอบเฉพาะ (ไม่มี } C\text{)} \end{cases}$$

เทคนิค 1: รูป $y'(x) = g(x).h(y)$

วิธีทำ $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

จะได้ $\Rightarrow$ $H(y) = G(x) + C.$ $\Rightarrow$ จัดรูป ถ้าทำได้ ในรูป $y = \_\_\_\_.$ #

ตัวอย่าง:

1.) ให้ $y(x)$ ที่สอดคล้อง $(1+\tan y)y' = x^2+1$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+\tan y}\right)}_{g(y)} \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{f(x)}$$

ย้ายข้าง $\Rightarrow$

$$\int (1+\tan y)\,dy = \int (x^2+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y + \ln|\sec y| = \frac{x^3}{3} + x + C} \quad \#$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$$

$(u = \cos x)$

$du = -\sin x\,dx$

$$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{u}\frac{du}{-\cancel{\sin x}} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

2.) หาคำตอบเฉพาะ $y(x)$ ที่สอดคล้อง

ปัญหาค่าเริ่มต้น.
$$\begin{cases} y'\tan x = a+y, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \end{cases}$$

หาคำตอบทั่วไป; ข้อสรุป
$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(a+y)}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tan x}}_{f(x)}$$
แยกตัวแปรได้

ย้ายข้าง
$$\int \frac{1}{a+y}\,dy = \int \cot x\,dx$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad u=\sin x,\ du=\cos x\,dx$$
$$= \int \frac{\cancel{\cos x}}{u}\,\frac{du}{\cancel{\cos x}} = \ln|\sin x| + C$$

จะได้:
$$\Rightarrow \ln|a+y| = \ln|\sin x| + C$$

ข้อสรุป:
และ $e^{\wedge}$:
$$a+y = e^{\ln|\sin x|}\cdot \underbrace{e^{C}}_{\tilde{C}}$$

$$\Rightarrow a+y = \tilde{C}\sin x, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

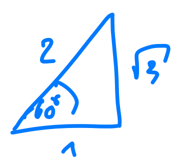
$$\Rightarrow y = \tilde{C}\sin x - a$$

$\Rightarrow$ คำตอบเฉพาะ หาค่า $\tilde{C}$ โดยแทนเงื่อนไข. $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a$

$\left(x=\frac{\pi}{3},\ y=a\right)$

แทนค่า
$$a = \tilde{C}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - a$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \frac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{3}}$$

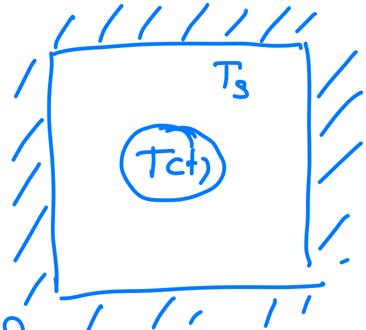


∴ คำตอบเฉพาะ;
$$y = \left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)\sin x - a \qquad \blacksquare$$

⇒ การประยุกต์ของ เทคนิค การแยกตัวแปร:

กฎการเย็นตัวของ นิวตัน:

$$(*) — \boxed{\frac{dT(t)}{dt} = k\,(T(t) - \underset{\text{คงที่}}{T_s})}$$



⇒ ถ้าต้องการ รู้ อุณหภูมิ $T(t)$ ที่เวลาใดๆ
จะต้อง แก้สมการเชิงอนุพันธ์ $(*)$

ผลคูณของ ฟังก์ชันที่แยกกัน., ค่าคงที่.

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{k}_{g(t)} \cdot \underbrace{(T - T_s)}_{f(T)}$$

ย้ายข้าง.
⇒ $$\int \frac{1}{(T-T_s)}\,dT = \int k\,dt$$

⇒ $$\ln|T - T_s| = kt + C_1$$ — สมการ. คำตอบของ $(*)$

ข้อสรุป:
(ยก e^{1})

$$T - T_s = e^{kt} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C} = Ce^{kt}$$

⇒ $$\boxed{T(t) = T_s + Ce^{kt}}$$ เป็นสมการคำตอบ ของกฎการเย็นตัวของ นิวตัน

⇒ Ex: น้ำขวด โซดา อุณหภูมิ $72^{\circ}F$ ไปวางไว้ในตู้เย็น $44^{\circ}F$ เวลาผ่านไปครึ่ง ชม. อุณหภูมิโซดาลดลงเป็น $61^{\circ}F$
(0.5 ชม.)

ข.1 จงหา อุณหภูมิของ โซดา เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชม.

รูปแบบคำตอบของ กฎการเย็นตัว.

ค่าคงที่ของวัตถุ

$$T(t) = T_s + \boxed{C}\, e^{\boxed{k}t}$$

ค่าคงที่ที่ได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น

- $T(0) = 72$
- $T_s = 44$
- $T(0.5) = 61$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t) = 44 + C e^{kt} & (**) \\ T(0) = 72 \\ T(0.5) = 61 \end{cases}$$

⇒ หาค่า C: แทน $T(0) = 72 \Rightarrow t = 0,\ T = 72$

แทน (**) ⇒ $72 = 44 + C\, \cancel{e^{k0}}^{\,1} \Rightarrow C = 72 - 44 = 28$

⇒ หาค่า k: แทน $T(0.5) = 61 \Rightarrow t = 0.5,\ T = 61$

แทนใน (**) ⇒ $61 = 44 + (28)\cdot e^{0.5k}$

($C = 28$)

$$\Rightarrow e^{\frac{k}{2}} = \frac{(61-44)}{28} = \frac{17}{28}$$

เทค ln ⇒ $\frac{k}{2} = \ln\left(\frac{17}{28}\right) \Rightarrow k = \cancel{2}\ln\left(\frac{17}{28}\right)^{2}$

ดังนั้น คำตอบเฉพาะ:

$$\boxed{T(t) = 44 + 28\cdot e^{t\ln\left(\frac{17}{28}\right)^2}}$$

⇒ ที่ $t = 1$ ชม.: $T(1) = 44 + 28\cdot e^{1\cdot\ln\left(\frac{17}{28}\right)^2}$

$$= 44 + \cancel{28}\cdot\left(\frac{17^2}{28^{\cancel{2}}}\right) = \ldots$$

6.) ใช้เวลานานเท่าใด T ของโซดาจะเป็น $50^{0}F$

จาก a.) $$T(t) = 44 + 28\cdot e^{t\cdot \ln\left(\frac{17}{28}\right)^2}$$

ให้ $T = 50$ แล้ว $t = ?$

$$\Rightarrow \quad 50 = 44 + 28\cdot e^{t\cdot\ln\left(\frac{17}{28}\right)^{2}} \quad e^{\ln\left(\frac{17}{28}\right)^{2t}}$$

จัดรูป.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{17}{28}\right)^{2t} = \frac{50-44}{28} = \frac{6}{28}$$

ใส่ ln.

$$\Rightarrow \quad 2t\ln\left(\frac{17}{28}\right) = \ln\left(\frac{6}{28}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{6}{28}\right) - \ln\left(\frac{17}{28}\right)\right]$$

⇒ **เทคนิค 2:** สมการเชิงเส้น (Linear eq.)

สมการเชิงเส้น $y = mx + c$

$\Rightarrow y(x) - mx = c$

สมการอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป. $$\boxed{y' + \underline{P(x)}\,y = \underline{Q(x)}}$$

Ex: $$\underbrace{y' + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{P(x)}y}\; = \underbrace{2}_{Q(x)}$$ — อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น

เทคนิค: เปลี่ยน $$\frac{d}{dx}\boxed{} = \tilde{Q}(x)$$

$$\Rightarrow \int 1\, d\,\Box = \int \tilde{Q}(x)\,dx \Rightarrow \Box = \int \tilde{Q}(x)\,dx + C$$

① การเปลี่ยน ด้านซ้ายมือ! ลอง คูณด้วย $\mu(x) = x$ ตลอด ทั้งสมการ

ต้องหา $\mu(x)$

จะได้ $$x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = x(2)$$

$$\Rightarrow xy' + y = 2x$$

② เปลี่ยนอยู่ในรูป ดิฟผลคูณ:

เปลี่ยน $$\frac{d}{dx}(xy) = 2x$$

เทคนิค แยกตัวแปร $\Rightarrow$ $$\int 1\, d(xy) = \int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow xy = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x}\left(x^2 + C\right)}$$ คำตอบ:

$\Rightarrow$ **key idea**: หา $\mu(x)$ ที่ เปลี่ยน ด้านซ้ายมือ ให้อยู่ในรูป ดิฟผลคูณ.

$\Rightarrow$ สมการ เชิงเส้น $$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

คูณ $\mu(x)$ ตลอด $\Rightarrow$ $$\boxed{\mu(x)\,y' + \mu(x)P(x)\,y} = \mu(x)Q(x)$$

ต้องการเปลี่ยน lhs: อยู่ในรูป ดิฟผลคูณ ของ.

ต้องการเปลี่ยน!

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\cdot y\right)}$$

check: $\frac{d}{dx}(\mu(x)\cdot y) = \underline{\mu(x)\, y'} + \left[\frac{d}{dx}\mu(x)\right] y$

⇒ เงื่อนไขที่ต้องการคือ: μ(x) ต้องสอดคล้อง

$$\boxed{\frac{d}{dx}\mu = \mu(x)\cdot P(x)}$$

หา μ(x) โดยเทคนิค แยกตัวแปร.

$$\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int P(x)\, dx$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)\, dx$$

⇒ เทค e

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}}$$

เงื่อนไขที่ต้องการ ของ μ(x)

⇒ สมการเชิงเส้น.

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \quad (*)$$

ผ.

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}}$$

คูณตลอด (*) ด้วย μ(x) จะได้

$$\mu(x)\underbrace{\left[y' + P(x)y\right]} = \mu(x)Q(x)$$

จะได้.

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$$

เทคนิค แยกตัวแปร.

$$\int d(\mu(x)y) = \int \mu(x)Q(x)\, dx$$

⇒

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\, dx$$

สำปันกรณี

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) Q(x)\, dx}$$

Ex: หาคำตอบของ. $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{2}_{Q(x)}$

$\Rightarrow$ หา $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = \underline{\underline{x}}$

$\Rightarrow$ คูณ $\mu(x) = x$ ตลอดกรณี

$$\underbrace{x\left(y' + \frac{1}{x} y\right)} = 2x$$

$$\int d(x \cdot y) = \int 2x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad xy = \int 2x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}\left(\int 2x\, dx\right) = \frac{1}{x}\left(x^2 + \underline{\underline{C}}\right) \quad \#$$

Sol: $y + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{2}_{Q(x)}$ หา $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$\Rightarrow \mu(x) = x$

Sol: $\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) Q(x)\, dx$

ระวัง!
อย่าลืมวงเล็บ.

$$= \frac{1}{x} \int x \cdot 2\, dx = \frac{1}{x}\left(x^2 + \underline{C}\right) \quad \#$$

Ex: จงหาผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น.

1.) $\dfrac{dy}{dx} + \underbrace{3x^2}_{P(x)} y = \underbrace{6x^2}_{Q(x)}$ อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น.

พ. $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$

คูณตลอดด้วย $\mu(x)$ ทั้ง 2

$$\underbrace{e^{x^3}\left(\frac{dy}{dx} + (3x^2)y\right)}_{\Downarrow} = e^{x^3}\cdot(6x^2)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\cdot y\right) = e^{x^3}\cdot(6x^2)$$

$u = x^3$
$du = 3x^2\,dx$

อินทิเกรต. $$\int d\left(e^{x^3}\cdot y\right) = \int e^{x^3}\cdot 6x^2\,dx$$

$2\int e^u \cdot \cancel{6x^2}\cdot \dfrac{du}{\cancel{3x^2}}$

$= 2e^u + C$

$$\Rightarrow \quad e^{x^3}\cdot y = 2e^{x^3} + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{e^{x^3}}\cdot\left[2e^{x^3} + C\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 2 + Ce^{-x^3}}$$

Ex: $x\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 3y$.

จัดรูป: $\dfrac{dy}{dx} + \underbrace{\left(-\dfrac{3}{x}\right)}_{P(x)} y = \underbrace{x}_{Q(x)}$

$\Rightarrow$ ตผ. $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\frac{3}{x}\,dx} = e^{(-3)\ln|x|} = x^{-3}$

ดังนั้น $\mu(x) = x^{-3}$

$\Rightarrow$ จากเทคนิคเชิงเส้น ดังนั้น

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, Q(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{x^{-3}} \int \underbrace{x^{-3} \cdot x}_{x^{-2}}\, dx$$

$$= x^3 \left(-x^{-1} + C\right)$$

ต้องควรระวัง!
C อยู่ในวงเล็บ

สรุป.
$\Rightarrow$ $y(x) = -x^2 + Cx^3$ ∎

Ex: หาคำตอบของ $3xy' - y = \ln x + 1,\ x > 0$.

วิธีทำ:

$$y' + \underbrace{\left(-\frac{1}{3x}\right)}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\ln x + 1}{3x}}_{Q(x)}$$

$\Rightarrow$ พ. $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{3x}\,dx}$

$$= e^{\left(-\frac{1}{3}\right)\ln|x|} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = x^{-\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ จะได้: $y = \dfrac{1}{\mu(x)} \displaystyle\int \mu(x)\cdot Q(x)\,dx$

$$= \frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} \int x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\ln x + 1}{3x}\right) dx$$

$$\text{I} \; — = x^{\frac{1}{3}} \int \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}} \cdot \ln x + x^{-\frac{4}{3}} \, dx$$

พ เทอม: $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int x^{-\frac{4}{3}} \cdot \ln x\,dx$

$u = \ln x$

$\int dv = \int x^{-\frac{4}{3}}\,dx$

$v = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)}$

by parts $= \cancel{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{\ln x \cdot x^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\cancel{\frac{1}{3}}\right)} - \displaystyle\int \dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\cancel{\frac{1}{3}}\right)}\, d\underbrace{\ln x}_{\frac{1}{x}dx}\right)$

$$= -\ln x\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) + \int x^{-\frac{4}{3}}\,dx$$

$$= -\ln x\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) + (-3)\cdot x^{-\frac{1}{3}} + C$$

⇒ แทนกลับใน (I) แล้วหา เทอมที่เหลือ. –

⇒ การบ้าน; จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น.

$$x^2y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2$$