แบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาค เทอม 2/2559

1. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $(x\ln x)y' + y^2 + 1 = 0,\ y(e) = 1$
2. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $\frac{dy}{dx} = \pi y^2 + y^2\cos(2x)$ เมื่อกำหนด $y(\pi) = 0$
3. ให้ T เป็นอุณหภูมิของวัตถุ ในเวลา ใดๆ และ T_s เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

เมื่อ $k > 0$ เป็นค่าคงตัว

3.1 จงแสดงว่า $T = T_s + Ce^{-kt}$ โดยวิธีแยกตัวแปร (separable)

3.2 จากข้อ 2.1 หากนำวัตถุไปเผาจนมีอุณหภูมิ $100^\circ C$ แล้วนำวัตถุไปแช่ในของเหลวซึ่งมีอุณหภูมิ $20^\circ C$ เมื่อเวลาผ่านไป 5 นาที อุณหภูมิของวัตถุลดลงเหลือ $50^\circ C$ จงหาอุณหภูมิของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที

4. จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน ถ้านำลูกบอลทองแดงไปเผาจนมีอุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส แล้วนำลูกบอลไปใส่ลงในน้ำเย็นซึ่งมีอุณหภูมิ 20 องศาเซลเซียส เมื่อเวลาผ่านไป 2 นาที อุณหภูมิของลูกบอลลดลงเหลือ 40 องศาเซลเซียส จงหาเวลาที่ลูกบอลจะเย็นลงจนมีอุณหภูมิ 30 องศาเซลเซียส
5. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $xy' = y + x^2\sec^2 x$

5.1 ตัวประกอบการอินทิเกรต (integration factor) $\mu(x)$ =.....

5.2 จงหาคำตอบของ $xy' = y + x^2\sec^2 x$

6. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)dy = (2x^3 - 2xy)dx$

6.1 จงจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้น $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

6.2 จงหาตัวประกอบการอินทิเกรต $\mu(x)$

6.3 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ

7. ในวงจร RC ต่อตัวเก็บประจุ C = 0.01 ฟารัด ต่อแบบอนุกรมกับตัวต้านทาน R = 100 โอห์ม และเติมประจุจาก $E(t) = 50e^{-5t}$ โวลท์ จงหาประจุไฟฟ้า ณ เวลา t ใดๆ สมมุติที่เวลาเริ่มต้นไม่มีประจุเลย

<u>แนะนำ</u> กฎของเคอร์ชอฟฟ์ $R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$

8. ในวงจร RL ที่มี R = 100 โอห์ม L = 2.5 เฮนรี E = 110 โวลท์ ถ้าที่เวลาเริ่มต้นไม่มีกระแสในวงจรเลย จงหากระแสที่เวลา t ใดๆ $\left(L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)\right)$
9. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $9y'' + 6y' + 5y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$
10. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 4y' + 5y = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = e^{2\pi}$, $y(\pi) = e^{3\pi}$
11. จงหา y_h และสมมติ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว

11.1 $y'' + 2y' = x + \sin x$

y_h = ...

y_p = ...

11.2 $y'' + 4y = xe^{-x} - 3\sin 3x$

y_h = ...

y_p = ...

11.3 $y'' + 4y' + 4y = x\cos 3x + 7$

y_h = ...

y_p = ...

11.4 $y'' - 8y' = x^2e^{-4x} + xe^{-8x}$

y_h = ...

y_p = ...

11.5 $y'' - 2y' + 5y = \pi e^x \sin 2x + 2e^{-x}\cos \pi x$

y_h = ...

y_p = ...

11.6 $y'' - 10y' + 25y = x^3 + 3e^{5x} + 7xe^{5x}$

y_h = ...

y_p = ...

12. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + y' = \cos x$

13. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 4y' - 12y = 8e^{2x} - 3$

14. ให้ $f(t) = 3\cosh 2t + e^{4t} - 5t^3$ จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$

$L\{f(t)\}$ = ...

15. ให้ $f(t) = 6\sin^2 2t + e^{4t+1}$ จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ [$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$]

16. ให้ $F(s) = \frac{3}{(s^2+4)} + \frac{2}{s^2-3}$ จงหาผลการแปลงอินเวอร์สลาปลาซของ $F(s)$

$L^{-1}\{f(t)\}$ = ...

17. ให้ $F(s) = \frac{s^2+s+33}{(s^2+36)(s-3)}$ จงหาผลการแปลงอินเวอร์สลาปลาซของ $F(s)$

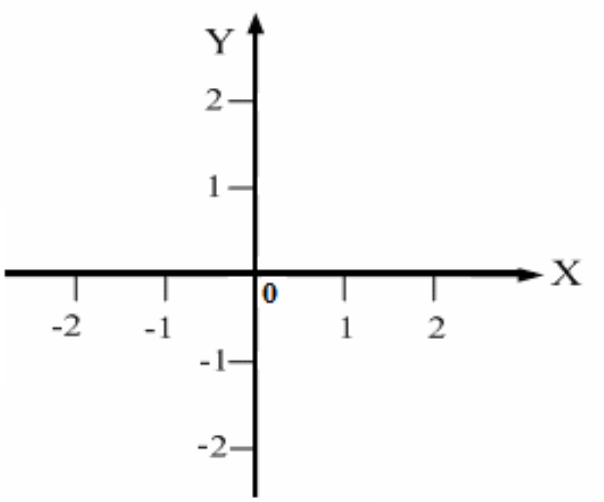
$L^{-1}\{f(t)\}$ = ...

18. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 9y = t;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ โดยใช้การแปลงลาปลาซ

19. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + 4y = \sin 3t;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ โดยใช้การแปลงลาปลาซ

20. กำหนดให้ $$f(x,y) = \frac{(x-1)(y-1)}{xy - x - y + 1}$$

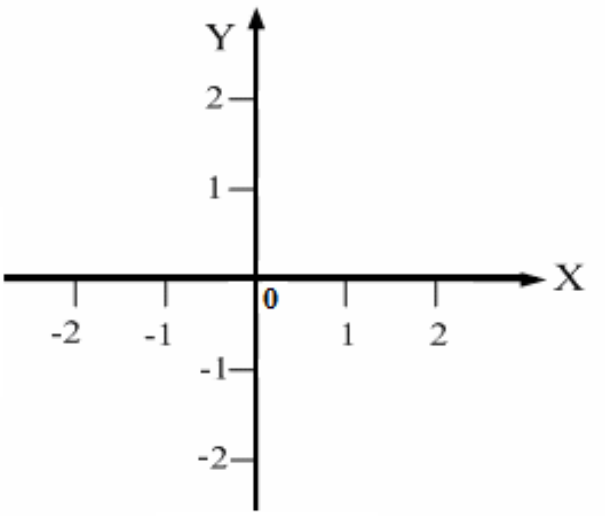
จงเขียนกราฟของโดเมนของ f โดยใช้เส้นทึบสำหรับขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน และใช้เส้นประสำหรับส่วนที่ไม่รวมในโดเมน



21. กำหนดให้ $$h(x,y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x - y^2)}$$

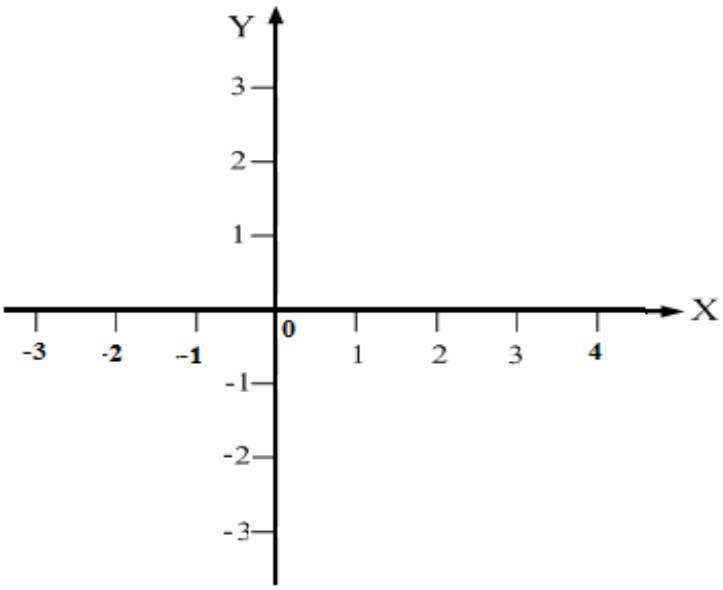
โดเมนของฟังก์ชัน $h = ...$

จงเขียนกราฟของโดเมนของ f โดยใช้เส้นทึบสำหรับขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน และใช้เส้นประสำหรับส่วนที่ไม่รวมในโดเมน



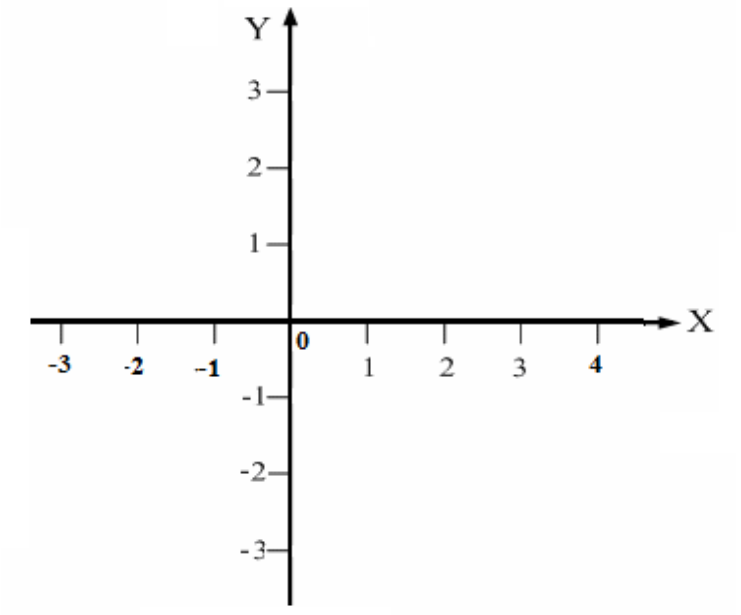
22. กำหนดให้ $f(x,y)=\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

จงวาดกราฟของเส้นโค้งระดับ $f(x,y)=k$ เมื่อ $k=0,\quad k=\ln 2,\quad k=\ln 3$



23. กำหนดให้ $x^2-2x+1+y^2=z$

จงวาดกราฟของเส้นโค้งระดับ $z=k:k=1,4,9$



24. กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$

24.1 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y=x$

24.3 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y=x^3$

24.3 สรุปว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

25. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x}{x^2+x+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 5 \qquad\qquad ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

25.1 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y=x$

25.2 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $x=y^2$

25.3 ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ต่อเนื่องที่จุด (0,0) หรือไม่ เพราะเหตุใด

26. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2};(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \qquad\qquad\quad ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

26.1 จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

26.2 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x,y)$ ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง เพราะเหตุใด

26.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ = ...

27. จงหาค่าของ

27.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{5xy}{x^2+5y}$ =.....

27.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{(x^2+y^2)}-1}{(x^2+y^2)}$

28. กำหนด $f(x,y,z) = xy^2z^3 + \sin(\frac{1}{x} + yz)$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

29. กำหนด $f(x,y,z) = x^2y\sqrt{z} + z\cos(zy + \pi)$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

30. พิจารณาสมการของวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย $V = IR$ เมื่อ V แทนค่าความต่างศักย์ (มีหน่วยเป็นโวลท์) I แทนกระแสในวงจร (มีหน่วยเป็นแอมแปร์) และ R แทนความต้านทาน (มีหน่วนเป็นโอห์ม) ถ้า V, I และ R มีการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับเวลา (t) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความต้านทานเทียบกับเวลา $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ เมื่อ กำหนดให้ $R = 600$ โอห์ม $I = 0.4$ แอมแปร์ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์เทียบกับเวลา $\frac{dV}{dt} = -0.1$ โวล์ท/วินาที และอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสเทียบกับเวลา $\frac{dI}{dt} = -0.0005$ แอมแปร์/วินาที

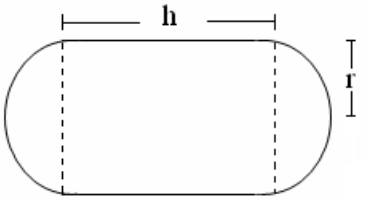
31. ให้ $w = t^2 \sin r + \ln s$, $r = \arctan(2x)$, $s = 2y + x^2$, $t = y^3\sqrt{x}$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

32. กำหนดให้ $\frac{x\sin(z)}{x+y} + y^2 = 10$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

33. ให้ $\tan(yz) + x^y = \ln(xy + z)$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

34. จากกฎของแก๊สอุดมคติ $P = \frac{nRT}{V}$ เมื่อ P เป็นความดันของแก๊ส (มีหน่วยเป็น atm) V เป็นปริมาตรของแก๊ส (มีหน่วยเป็นลิตร) T เป็นอุณหภูมิของแก๊ส (มีหน่วยเป็นเซลเซียส) n เป็นจำนวนโมล และ R เป็นค่าคงที่ของแก๊ส นำน้ำมาทำให้ระเหยกลายเป็นไอในภาชนะขนาด 10 ลิตร พบว่าน้ำระเหยเป็นไอสมบูรณ์ที่อุณหภูมิ 200 องศาเซียลเซียส จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลรวมคำนวณค่าผิดพลาดของการวัดความดันของไอน้ำที่เป็นไปได้มากที่สุด
ถ้ากำหนดให้ n และ R เป็นค่าคงที่ ค่าผิดพลาดในการวัดปริมาตรมากที่สุดเป็น 0.5 และค่าผิดพลาดในการวัดอุณหภูมิมากที่สุดเป็น 0.01 (ตอบติด n และ R)

35. พิจารณาแคปซูลซึ่งประกอบด้วยทรงกระบอกและครึ่งทรงกลมดังรูป ถ้าให้ r และ h คือรัศมีและความยาวของแคปซูล และให้ A แทนพื้นที่ผิวของแคปซูล จะได้ว่า $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$ ถ้าวัดความยาวของแคปซูลได้ 1 ซม. และวัดรัศมีของแคปซูลได้ 0.5 ซม. โดยต่างก็มีค่าผิดพลาดในการวัดไม่เกิน 0.01 ซม. จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลรวมเพื่อประมาณค่าผิดพลาดในการวัดค่า A ที่เป็นไปได้มากที่สุด



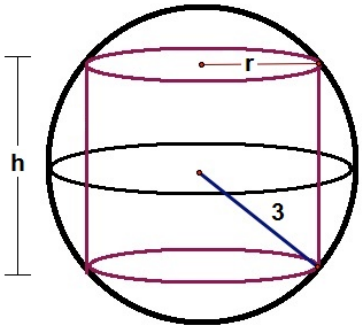
36. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า(ถ้ามี) ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 2x^2y - y^2 - 4x^2 + 3y$$

37. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า(ถ้ามี) ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$$

38. พิจารณาทรงตันรูปทรงกระบอกรัศมี r สูง h ที่บรรจุแนบในพื้นผิวทรงกลมรัศมี 3 หน่วยดังรูป จงเขียนรูปแบบปัญหาเพื่อหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดของทรงตันดังกล่าว โดย**วิธีตัวคูณลากรองจ์**



ปัญหาค่า .....

ภายใต้เงื่อนไข .....

39. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด(ถ้ามี) ของ $x^2 + 2y^2 - xy$ ภายใต้เงื่อนไข $2x + y = 22$ โดยใช้**วิธีตัวคูณลากรองจ์**

40. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด(ถ้ามี) ของ $x^2 + y^2$ สำหรับจุด (x, y) ที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา $xy = 4$ โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์