

แบบฝึกหัดสำหรับกลางภาค 2562/2 ชุดที่ 4

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $2yy' = e^{x+2}e^{y^2}$

2. ถ้ำต้มของเหลวชนิดหนึ่งให้มีอุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส และปล่อยให้เย็นที่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียส พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที อุณหภูมิของเหลวลดลงมาเหลือ 75 องศาเซลเซียส จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใดของเหลวนั้นจึงจะมีอุณหภูมิลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของอุณหภูมิเริ่มต้น
 (โดยใช้กฎการเย็นตัวของนิวตัน $\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$)

3. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $(1 + x^2)y' = 2xy + ((1 + x^2) \sec(x))^2$

4. ในวงจร RC ที่มี $R = 10$ โอห์ม $C = 0.5$ ฟารัด โดยมีแหล่งจ่ายไฟเป็น $E = 4e^{-t}$ โวลต์ ถ้าที่เวลาเริ่มต้นไม่มีประจุในวงจรเลย จงหาประจุในวงจรที่เวลา t ใด ๆ $(R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t))$

5. จงแก้ปัญหาค่าขอบ $y'' + 6y' + 8y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

6. จงหา y_h และ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว
 - 6.1. $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x} + \pi$
 $y_h = \dots\dots\dots$
 $y_p = \dots\dots\dots$

 - 6.2. $y'' - 2y' + 10y = x \cos(3x) + 3e^{2x}$
 $y_h = \dots\dots\dots$
 $y_p = \dots\dots\dots$

7. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 4y' = 3 + 10 \sin(2x)$

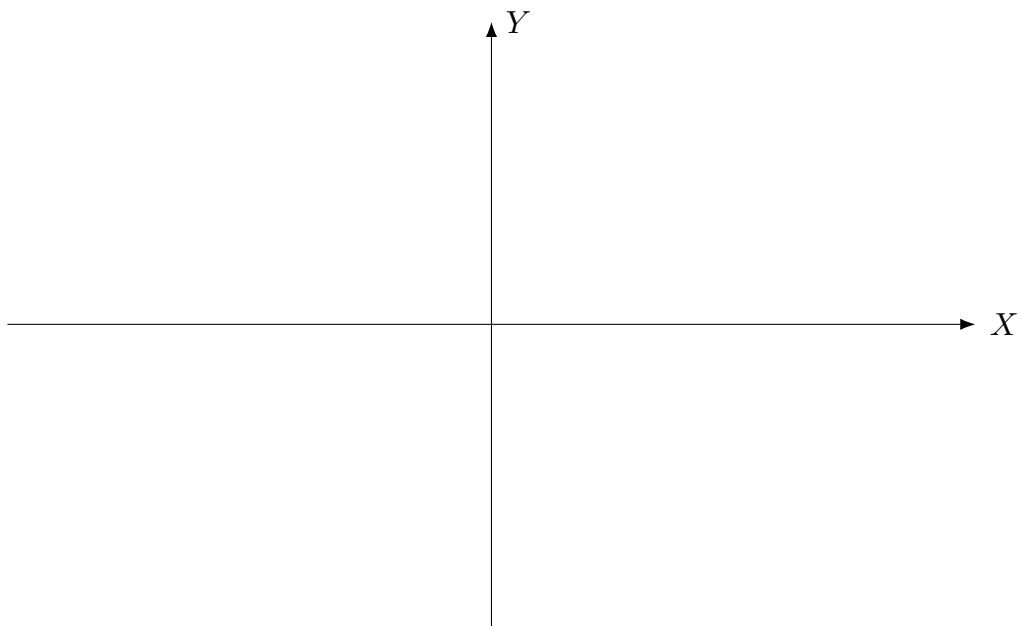
8. กำหนดให้ $f(t) = 2 \sin^2(7t) + (3t + 1)^2$ จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(t)$

9. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + 9y = 5 \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ โดยใช้การแปลงลาปลาซ

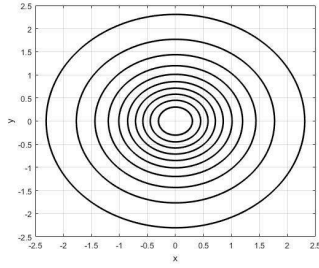
10. กำหนด $f(x, y) = \frac{\arcsin(x^2 + y^2 - 2)}{x^2 - y^2}$

10.1. โดเมนของฟังก์ชัน $f = \dots\dots\dots$

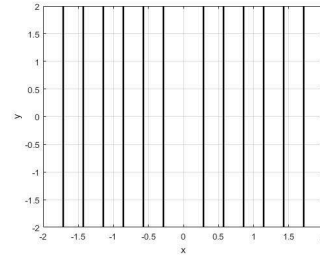
10.2. จงเขียนกราฟของโดเมนของฟังก์ชัน f โดยแรเงาพื้นที่ที่เป็นโดเมน และใช้เส้นทึบแสดงของเขตที่รวมอยู่ในโดเมน เส้นประแสดงขอบเขตที่ไม่รวมอยู่ในโดเมน



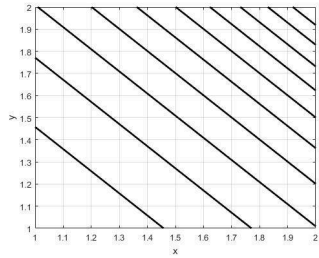
11. เส้นโค้งระดับของ $f(x, y) = 2^{x^2+y^2}$ คือกราฟในข้อ _____



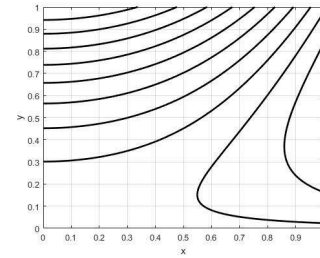
(A)



(B)

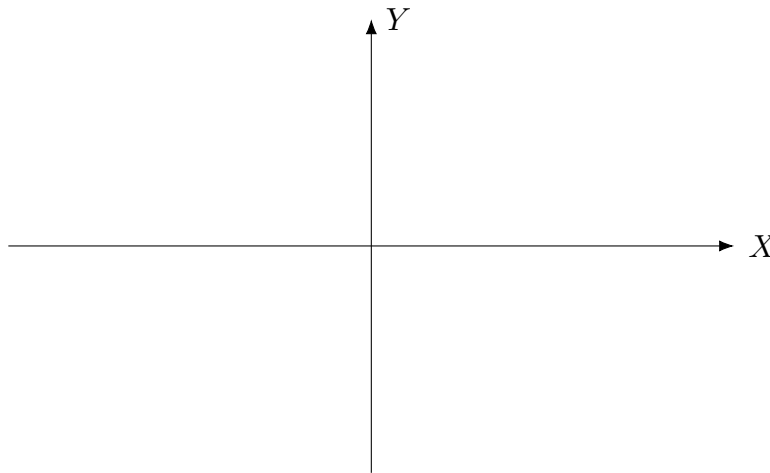


(C)



(D)

12. กำหนดให้ $z = f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ จงวาดเส้นโค้งระดับของ $z = k$ เมื่อ $k = 0, 1, 2$



13. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

13.1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + e^{xy}}{1 + x + y}$

13.2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \sin(x + y) \cos(x - y)$

14. กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{xy^4}{x + y^4}$

14.1. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ตามเส้น $y = x$

14.2. จงหาค่าของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y = x^2$

14.3. จากข้อ 14.1 และ 14.2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ หาค่าได้หรือไม่เพราะเหตุใด

15. กำหนด $f(x,y,z) = x + \sin(xy) + \ln(x+y+z)$

15.1. จงหา $f_x = \dots\dots\dots$

15.2. จงหา $f_y = \dots\dots\dots$

15.3. จงหา $f_z = \dots\dots\dots$

15.4. จงหา $f_{yz}(1,6,2) = \dots\dots\dots$

16. กำหนดให้ $z = u^3 \cos(v)$ และ $u - x^2 = v - y^4 = e^{xy}$ จงใช้กฎลูกโซ่หา

16.1. จงหา $\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$

16.2. จงหา $\frac{\partial z}{\partial y} = \dots\dots\dots$

17. จงหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อกำหนดให้ $y^3 - 3^z = \sec(xz)$

17.1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$

17.2. $\frac{\partial z}{\partial y} = \dots\dots\dots$

18. นอวัค จอคอวิช เสรีฟลูกเทนนิสที่มีน้ำหนัก 0.15 กก. ด้วยความเร็ว 35 เมตร/วินาที ถ้ากำหนดให้ค่าผิดพลาดที่เป็นไปได้ในการวัดน้ำหนักลูกเทนนิสและความเร็วลูกเทนนิสมีค่าเท่ากันคือ 0.2% จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวมประมาณค่าผิดพลาดร้อยละที่เป็นไปได้ในการวัดค่าพลังงานจลน์ของลูกเทนนิส (ถ้า K แทนพลังงานจลน์ของวัตถุ(J) m แทนมวลของวัตถุ(kg) และ v แทนความเร็วของวัตถุ(m/s) จะได้ว่า $K = \frac{1}{2}mv^2$)

19. จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า (ถ้ามี) ของ

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 16xy + 2$$

20. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อย $f_x = 2y - 2x$ และ $f_y = 2x - 2y$

20.1. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของ f

20.2. ถ้าจุด $(1, 1)$ เป็นจุดวิกฤตหนึ่งของ f จงแสดงว่าที่จุด $(1, 1)$ จะทำให้ f เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดอานม้า

21. เด็กชายตุ๊ตู่ ต้องการสะสมการ์ดพลังโปเกมอนให้ครบ 500 ใบ ตุ๊ตู่มีการ์ดเกือบทุกชนิดรวมกันเป็นของตัวเอง 250 ใบ ขาดแต่การ์ดพลังงานพิเศษและการ์ดซัพพอร์ต ตุ๊ตู่จึงไปของซื้อการ์ดพลังพิเศษจากเด็กชายหนุ่ยวันจำนวน x ใบ และขอซื้อการ์ดซัพพอร์ตจากเด็กชายปกปิดจำนวน y ใบ หนุ่ยวันขายการ์ดใบละ 200 บาทแต่ปกปิดขายการ์ดราคา 2 เท่าของหนุ่ยวัน

จงเขียนรูปแบบปัญหาเพื่อหาจำนวนเงินที่น้อยที่สุดที่ตุ๊ตู่จะใช้ในการซื้อการ์ดพลัง โดยใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

ปัญหาค่า _____ ของ _____

ภายใต้เงื่อนไข _____

22. จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (ถ้ามี) ของ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ โดยใช้ วิธีตัวคูณลากรองจ์ เมื่อ (x, y) เป็นจุดบนเส้นตรง $x + 2y = 4$