แบบฝึกหัดสำหรับกลางภาค 2562/2 ชุดที่ 3

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\quad (1+x^2+y^2+x^2y^2)\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x = 0$

2. กฎการเย็นตัวของนิวตันกล่าวว่า $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ (อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ T เทียบกับเวลา t) เป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุและอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม นั่นคือ $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s)$ เมื่อ T_s เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมถ้าทำน้ำแข็งโดยนำน้ำที่มีอุณหภูมิ 15 องศาเซลเซียส แล้วไปใส่ในตู้เย็นซึ่งมีอุณหภูมิ -5 องศาเซลเซียส เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที อุณหภูมิของน้ำลดลงเหลือ 5 องศาเซลเซียส จงหาเวลาที่น้ำจะเย็นลงจนเป็นน้ำแข็งที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส

3. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $\quad (xy + x + x^3)\,\mathrm{d}x - (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$

4. ในวงจร RL ที่มี $R = 10$ โอห์ม $L = 0.5$ เฮนรี่ $E = 10\mathrm{e}^{-10t}$ โวลท์ ถ้าที่เวลาเริ่มต้นไม่มีกระแสในวงจรเลย จงหากระแสที่เวลา t ใด ๆ $\left(L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E(t)\right)$

5. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

6. จงพิจารณาว่า $y = \mathrm{e}^x + 2x^2 + 6x + 9$ เป็นคำตอบของสมการ $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 4x^2$ หรือไม่ พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

7. จงหา y_h และ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $\quad y'' - 4y' = x\mathrm{e}^{-4x} + 1$
โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว

   $y_h =$ . . . . . .

   $y_p =$ . . . . . .

8. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\quad y'' - 2y' + y = 3 + \mathrm{e}^x$

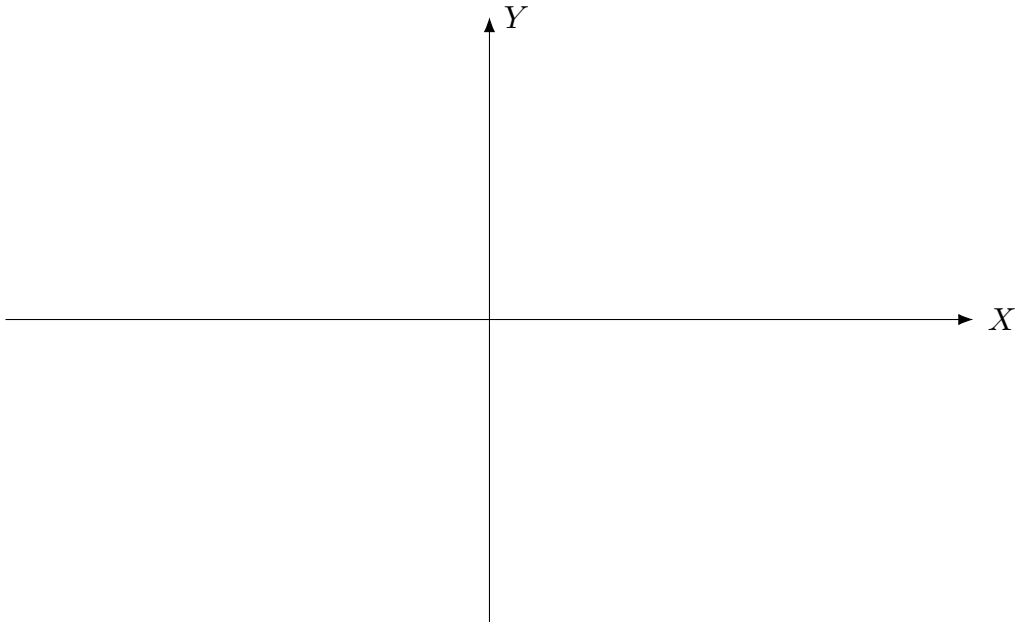
9. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $\quad y'' + 4y = 2\sin(3x), \quad y(0) = y'(0) = 0$ **โดยใช้การแปลงลาปลาซ**

10. กำหนดให้ $\quad f(t) = 2\cos^2(-5t) + (3\mathrm{e}^{2t} + 1)^2 \quad$ จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(t)$

11. กำหนด $f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x^2+1)}{\sqrt{2y-x}}$

11.1. โดเมนของฟังก์ชัน $f =$ . . . . . .

11.2. จงเขียนกราฟของโดเมนของฟังก์ชัน f โดยแรงเงาพื้นที่ที่เป็นโดเมน และใช้เส้นทึบแสดงขอบเขตที่รวมอยู่ในโดเมน เส้นประแสดงขอบเขตที่ไม่รวมอยู่ในโดเมน

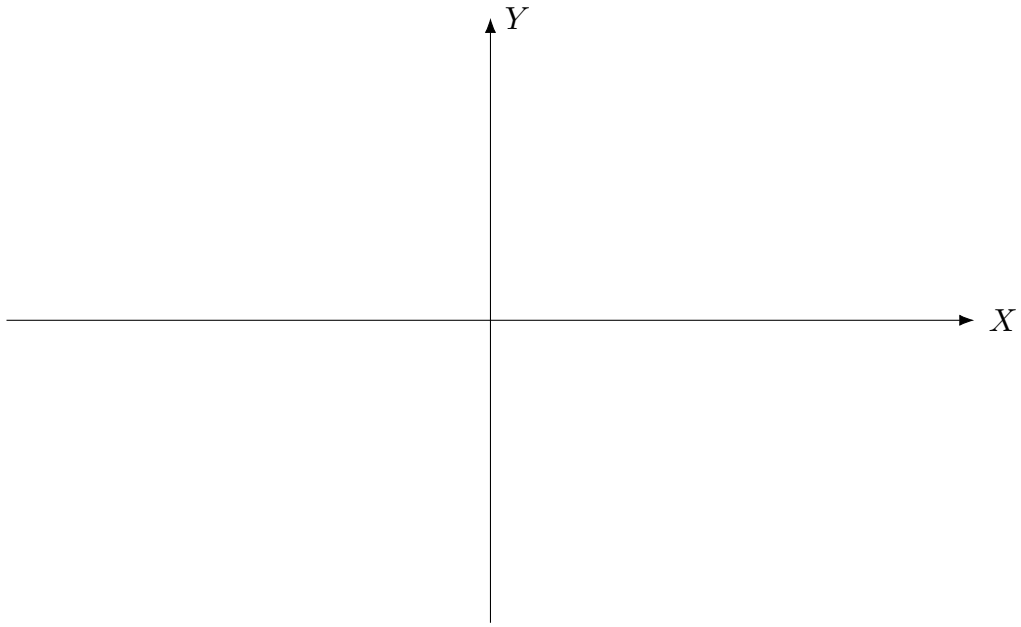


12. กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x,y) = \dfrac{1-3y}{x^2+y^2+1}$

12.1. จงเขียนสมการเส้นโค้งระดับ $z = k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- เมื่อ $k = 0$ สมการเส้นโค้งระดับคือ _____
- เมื่อ $k = 1$ สมการเส้นโค้งระดับคือ _____
- เมื่อ $k = -1$ สมการเส้นโค้งระดับคือ _____

12.2. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งระดับ $z = k$ เมื่อ $k = 0, 1, -1$



13. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$

13.1. จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y = 2x$

13.2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ตามเส้น $y = x^2$

13.3. จากข้อ 13.1 และ 13.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าได้หรือไม่เพราะเหตุใด

14. กำหนด $f(x,y,z) = y^2\mathrm{e}^{xz}$

14.1. จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ . . . . . .

14.2. จงหา $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$ . . . . . .

14.3. จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} =$ . . . . . .

14.4. จงหา $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} =$ . . . . . .

15. กำหนดให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ถ้า $x = \mathrm{e}^u + \cos v$ และ $y = \mathrm{e}^u + \sin v$ จงใช้ตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้ หาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ ที่จุด $(u,v) = (0,0)$

(x,y)	f	f_x	f_y
$(0,0)$	3	8	4
$(2,1)$	6	5	2

16. อนุภาคชนิดหนึ่งเคลื่อนที่บนพื้นผิวในสามมิติ มีสมการการเคลื่อนที่เป็น $\ln z = (\ln x)(\ln y)$

16.1. จงหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$ . . . . . .

$\frac{\partial z}{\partial y} =$ . . . . . .

16.2. ถ้ากำหนดให้ $x = \mathrm{e}$ หน่วย $y = \mathrm{e}^2$ หน่วย โดยที่ค่าผิดพลาดที่เป็นไปได้ในการวัดค่า x และ y คือ 0.5% จงใช้ **ค่าเชิงอนุพันธ์รวม** ประมาณค่าผิดพลาดร้อยละที่เป็นไปได้ในการวัด z

17. จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า(ถ้ามี) ของ

$$f(x,y) \;=\; 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$$

18. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองต่อเนื่อง ถ้า $(1,1)$ และ $(0,2)$ เป็นจุดวิกฤติของ f ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f_{xx}(1,1) = 4, \quad f_{xy}(1,1) = 1, \quad f_{yy}(1,1) = 2$$
$$f_{xx}(0,2) = 4, \quad f_{xy}(0,2) = 6, \quad f_{yy}(0,2) = 9$$

18.1. $f(1,1)$ เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เพราะเหตุใด

18.2. $f(0,2)$ เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เพราะเหตุใด

19. จงเขียนรูปแบบปัญหาตัวคูณลากรองจ์ เพื่อหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $x\vec{i} + y\vec{j}$ ในระนาบ ที่ทำให้ผลคูณภายใน (dot product) ของเวกเตอร์ดังกล่าว กับเวกเตอร์ $3\vec{i} - 5\vec{j}$ มีค่ามากที่สุด

ปัญหาค่า _____ ของ _____

ภายใต้เงื่อนไข _____

20. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด(ถ้ามี) ของ $f(x,y) = x^3y^4$ สำหรับจุด (x,y) ใดๆ ที่อยู่บนเส้นตรง $x + y = 7$