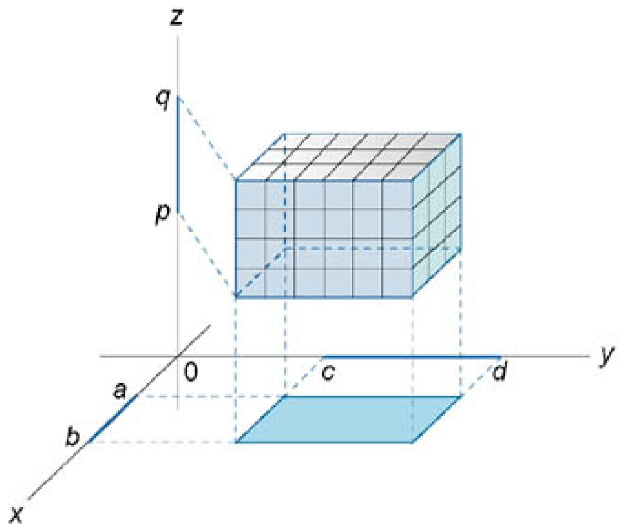
บทที่ 6 อินทิกรัลสามชั้น

6.1 อินทิกรัลสามชั้น (Triple Integrals)

เราจะเริ่มจากการพิจารณากรณีที่ง่ายที่สุด ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า B ที่กำหนดโดย

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$$

ดังรูป



เราจะแบ่ง B ออกเป็นกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ที่มีขนาดเท่ากัน โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle x = \dfrac{b-a}{l}$ แบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle y = \dfrac{d-c}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[p, q]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle z = \dfrac{q-p}{n}$ ดังนั้นเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กที่มีขนาดเท่ากันทั้งหมด lmn กล่อง แต่ละกล่องมีปริมาตรเป็น $\triangle V = \triangle x \triangle y \triangle z$

สร้างผลบวกรีมานน์ (Riemann sum)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\triangle V}$$

เมื่อ $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ คือจุดบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย B_{ijk} เรานิยาม **อินทิกรัลสามชั้น (triple integral)** ของฟังก์ชัน f เหนือกล่อง B ดังนี้

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x, y, z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\triangle V}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ทฤษฎีบท 6.1.1 (Fubini's Theorem) ให้ f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y, z ที่นิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ แล้ว

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz}$$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาค่าของ $\iiint\limits_B xyz^2 dV$ เมื่อ B คือกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดโดย $B = \{(x, y, z)/0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

จะสังเกตได้ว่า ถ้า f คือฟังก์ชันค่าคงที่ $f(x, y, z) = 1$ จะได้ว่า

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x, y, z)dV = \iiint\limits_B dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \triangle V = V}$$

เมื่อ V คือปริมาตรของ B ดังนั้นถ้า $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ แล้ว

$$\boxed{V = \int_r^s \int_c^d \int_a^b dxdydz}$$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาปริมาตรของ B เมื่อ B คือกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดโดย $B = \{(x, y, z)/0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8, 0 \leq z \leq 4\}$

ต่อไปเราจะพิจารณาการหาค่าของอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตันปิด E ใดๆ โดยเราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็นกรณีต่างๆ ตามชนิดของทรงตันดังนี้

ทรงตันปิดชนิดที่ 1 (type I solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z)/u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจคชัน E ลงบนระนาบ XY รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 1

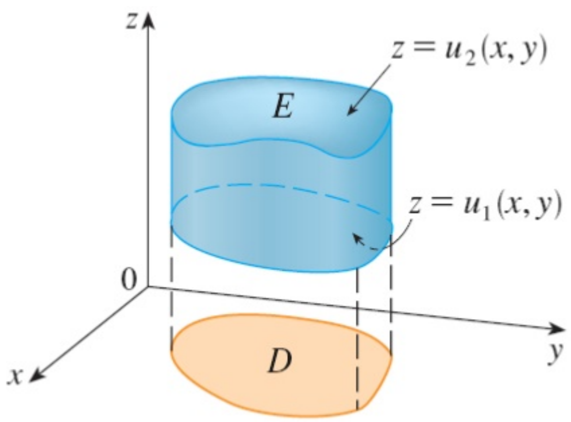
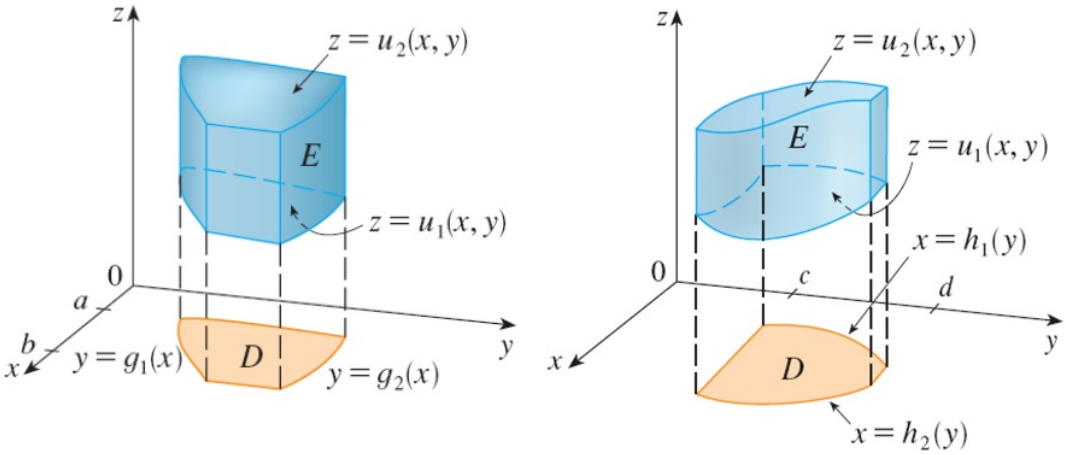


Figure 1: Solid type I

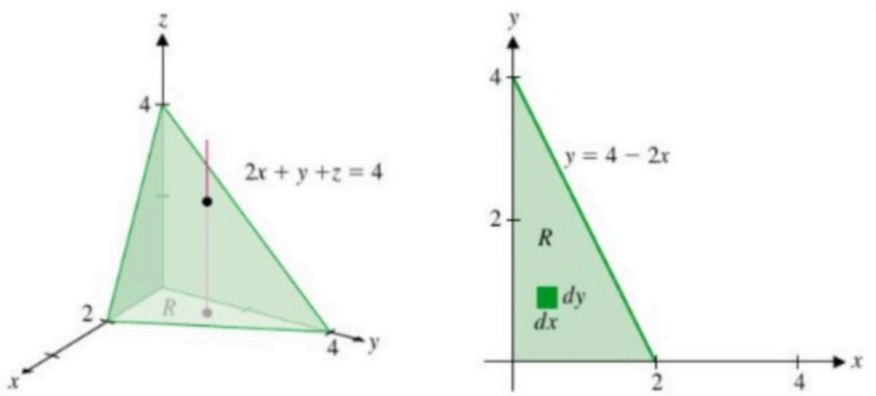
การหาค่าของอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x, y, z)dV = \iint\limits_R \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dA}$$

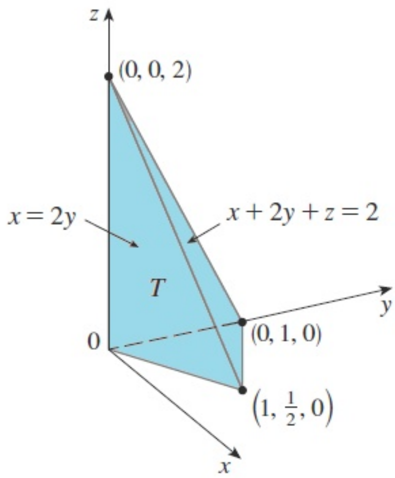
การอินทิเกรตในวงเล็บสามารถทำได้โดยอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร z โดยให้ตัวแปร x และ y เป็นตัวคงค่า ผลที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของ x และ y จากนั้นจึงนำไปหาค่าอินทิกรัลสองชั้นเหนือบริเวณ R ซึ่งอาจเป็นบริเวณชนิดที่ 1 หรือ 2 ก็ได้ตามที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้ในบทที่ 5

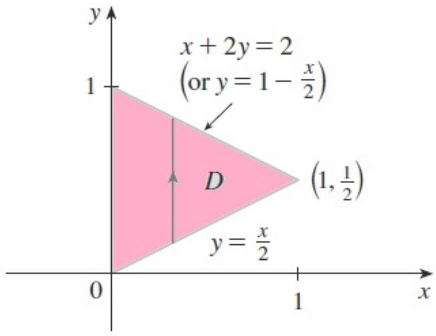


ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าของ $\iiint\limits_E 6xy\,dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 0, y = 0, z = 0$ และ $2x + y + z = 4$ ดังรูป



ตัวอย่าง 6.1.5 จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของ E เมื่อ E คือทรงตันดังรูป





ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาค่าของ $\iiint\limits_E x^2 e^y dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิวเชิงทรงกระบอก $z = 1 - y^2$ ด้านล่างด้วยระนาบ $z = 0$ และด้านข้างด้วยระนาบ $x = 1$ และ $x = -1$

ทรงตันปิดชนิดที่ 2 (type II solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z)/u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z), (y, z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจคชัน E ลงบนระนาบ YZ รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 2

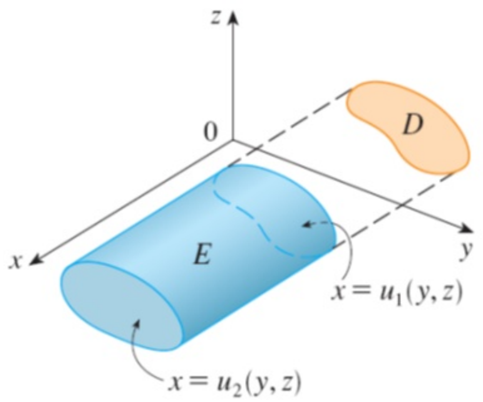
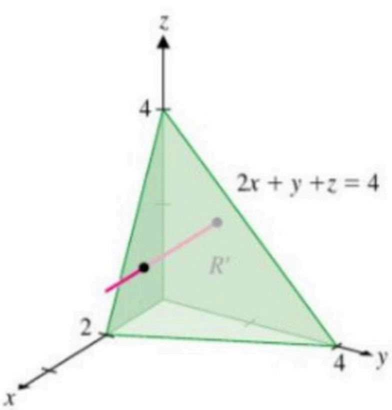


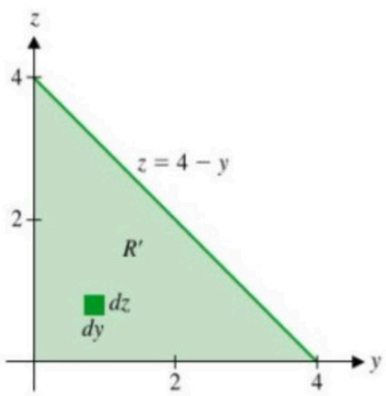
Figure 2: Solid type II

การหาค่าของอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x, y, z)dV = \iint\limits_R \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx\right) dA}$$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของ E เมื่อ E คือทรงตันในตัวอย่าง 6.1.4 โดยอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x ก่อน





ทรงตันปิดชนิดที่ 3 (type III solid)

ให้ E เป็นทรงตันปิดที่กำหนดโดย

$$E = \{(x,y,z)/u_1(x,z) \le y \le u_2(x,z), (x,z) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณที่เกิดจากการโปรเจคชัน E ลงบนระนาบ XZ รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างของทรงตันปิดชนิดที่ 3

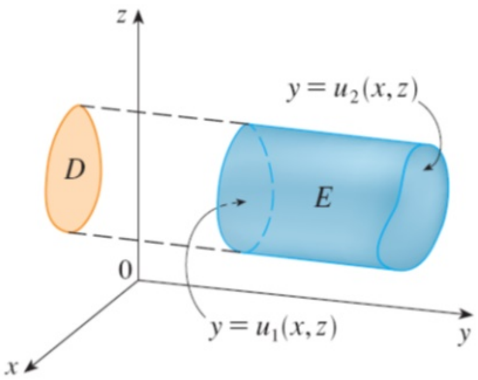
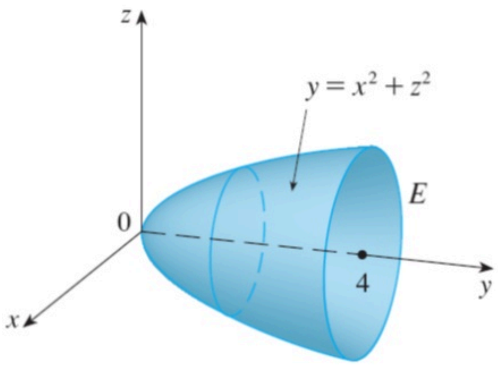


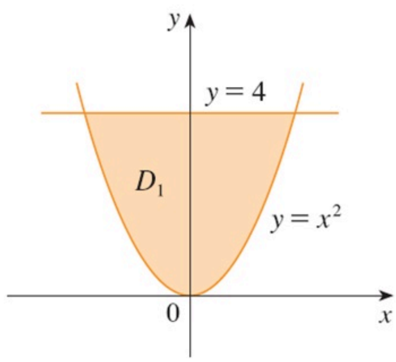
Figure 3: Solid type III

การหาค่าของอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เหนือทรงตัน E สามารถทำได้โดย

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iint\limits_R \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dA}$$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาค่าของ $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $y = x^2 + z^2$ และ ระนาบ $y = 4$



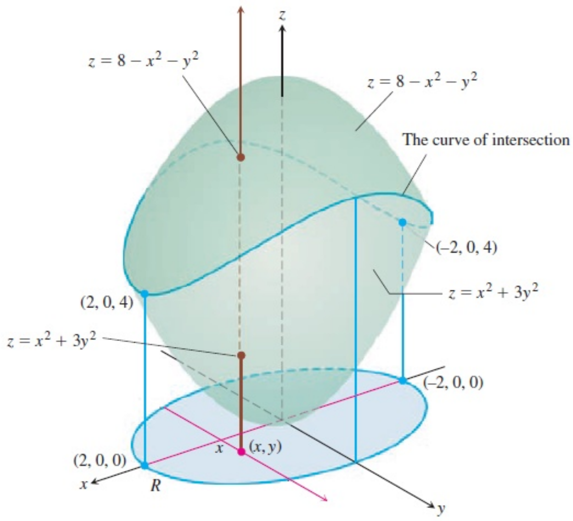


ตัวอย่าง 6.1.9 จงเขียนรูปทรงตันที่สอดคล้องกับอินทิกรัลสามชั้นที่กำหนดให้ และจงเขียนอินทิกรัลสามชั้นของ $f(x,y,z)$ เหนือทรงตันที่วาดได้ ในลำดับการทิเกรตอื่นๆ ที่เหลืออีก 5 ลำดับ

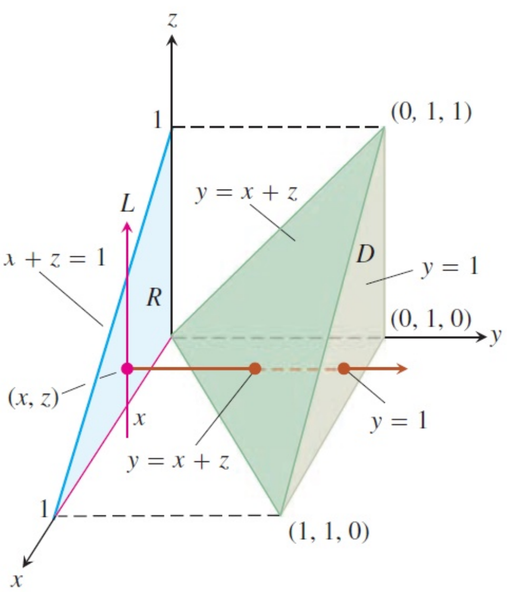
(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$

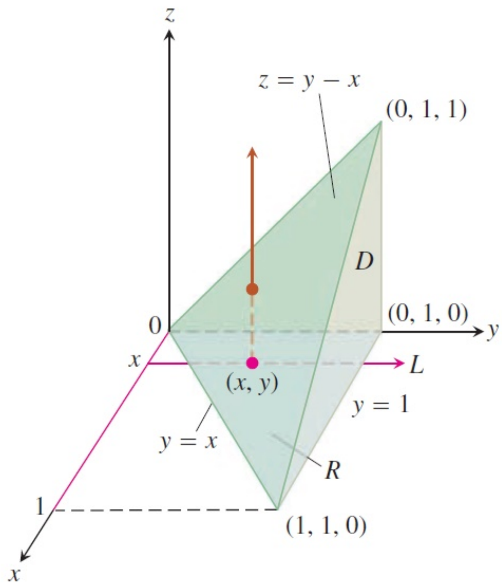
(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)dzdydx$

ตัวอย่าง 6.1.10 จงเขียนปริมาตรของทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = x^2 + 3y^2$ และ $z = 8 - x^2 - y^2$ ในรูปอินทิกรัลสามชั้น **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



ตัวอย่าง 6.1.11 จงเขียนอินทิกรัลสามชั้นของ $f(x, y, z)$ เหนือทรงตัน E ที่กำหนดให้ดังรูป ในลำดับการอินิเกรตที่กำหนดให้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**





$$\iiint_E f(x, y, z)dydzdx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dzdydx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6.2 พิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม (Cylindrical and Spherical coordinates)

พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinates)

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใน 3 มิติ นอกเหนือจากพิกัดฉาก (x, y, z) เรายังสามารถบอกตำแหน่งของ P ได้ด้วยพิกัด $P(r, \theta, z)$ เมื่อ r และ θ คือพิกัดเชิงขั้วของจุดที่ได้จากการโปรเจคชันจุด P ลงบนระนาบ XY ดังรูป

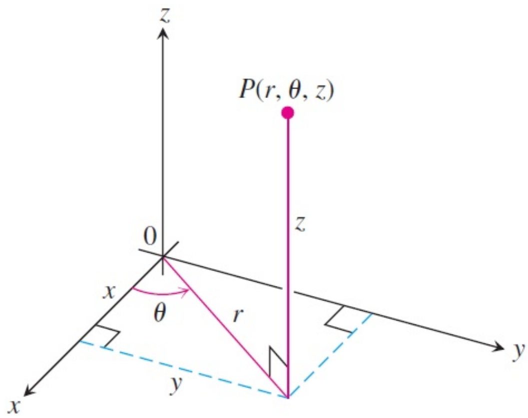


Figure 4: The cylindrical coordinates

ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y, z) และ (r, θ, z) ดังนี้

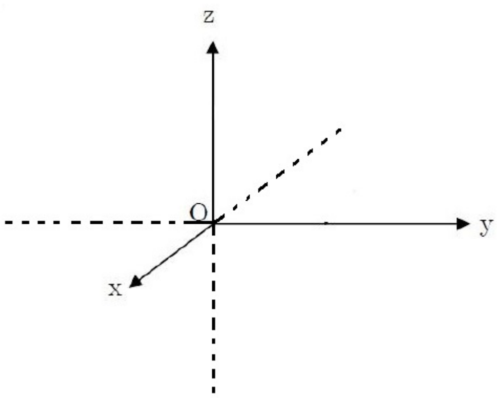
$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z}$$

ในทางกลับกัน เราจะได้ว่า

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z}$$

ตัวอย่าง 6.2.1

(a) จงเขียนจุด $(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก



(b) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(3,-3,-7)$ ให้เป็นพิกัดทรงกระบอก

พิกัดทรงกลม (Spherical coordinates)

นอกเหนือจากพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอกแล้ว เรายังสามารถบอกตำแหน่งของจุดใน 3 มิติด้วยพิกัดทรงกลมได้อีกด้วย

ให้ $P(x,y,z)$ เราสามารถเขียนแทน P ได้ด้วยพิกัดทรงกลม $P(\rho,\theta,\phi)$ เมื่อ

ρ คือ ขนาดของเส้นตรง OP ที่เชื่อมระหว่าง P และจุดกำเนิด O

θ คือ มุมที่เส้นตรงที่เกิดจากการโปรเจคชันเส้นตรง OP ลงบนระนาบ XY ทำกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา, $0 \le \theta \le 2\pi$

ϕ คือ มุมที่เส้นตรง OP ทำกับแกน Z บวก, $0 \le \phi \le \phi$

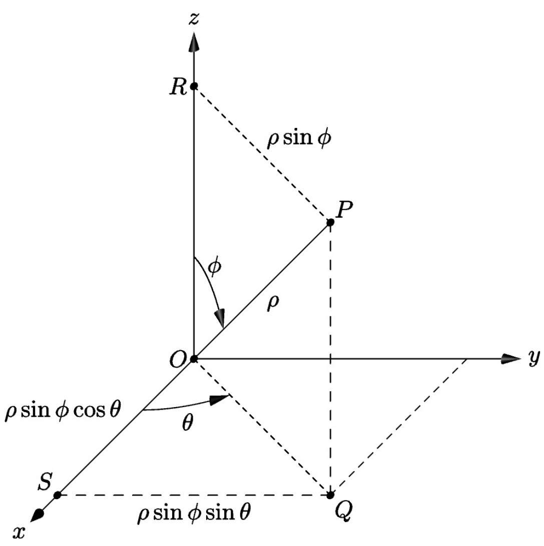


Figure 5: The spherical coordinates

จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง (x,y,z) และ (ρ,θ,ϕ) ดังนี้

$$\boxed{x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi}$$

และ

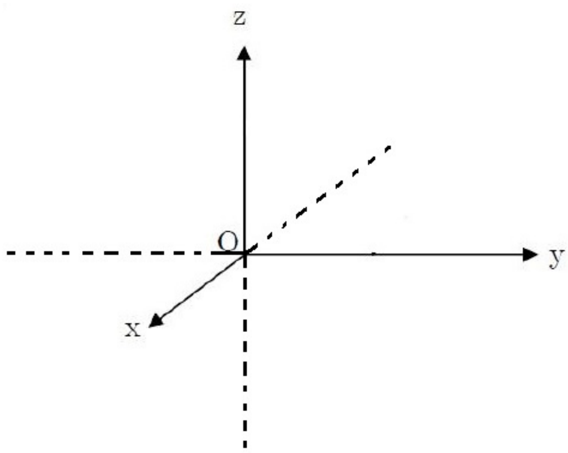
$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกระบอก $P(r,\theta,z)$ และพิกัดทรงกลม $P(\rho,\theta,\phi)$ ได้ดังนี้

$$\boxed{r = \rho\sin\theta \qquad \theta = \theta \qquad z = \rho\cos\phi}$$

ตัวอย่าง 6.2.2

(a) จงเขียนจุด $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ใน 3 มิติพร้อมทั้งเปลี่ยนให้เป็นพิกัดฉาก



(b) จงเปลี่ยนพิกัดฉาก $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ ให้เป็นพิกัดทรงกลม

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาสมการในพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลมของพื้นผิวไฮเปอร์โบลอยด์เชื่อมโยง $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

6.3 อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก (Triple Integrals in cylindrical coordinates)

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ $f(x, y, z)$ ที่นิยามบนทรงตัน E ซึ่งกำหนดโดย

$$E = \{(x, y, z)/u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in R\}$$

เมื่อ R คือบริเวณเชิงขั้ว นั่นคือ

$$R = \{(r, \theta)/h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ดังรูป

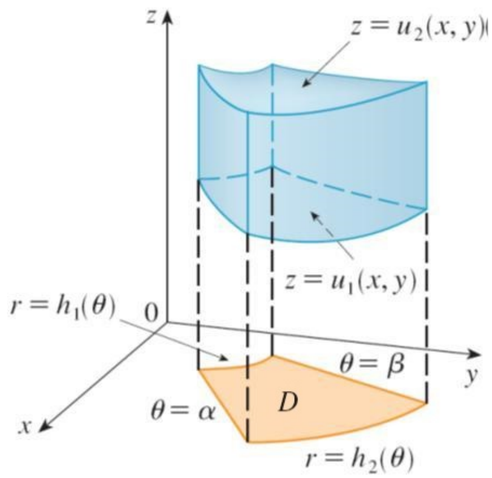
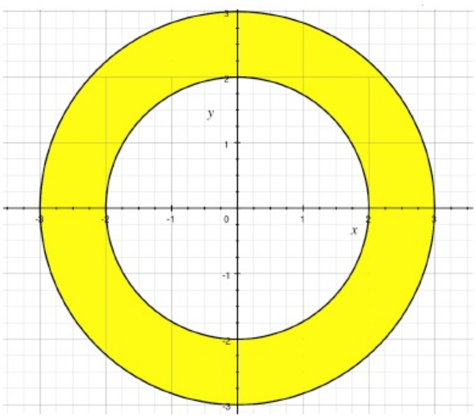


Figure 6: The solid over polar region

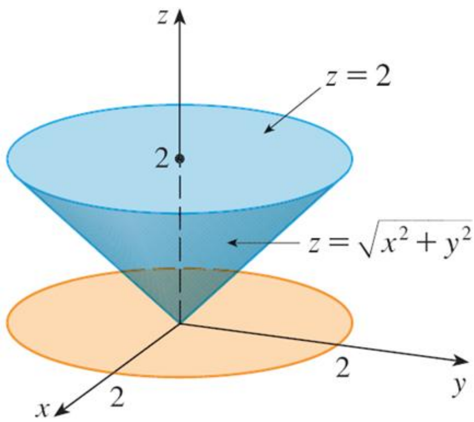
เราจะได้ว่าอินทิกรัลสามชั้นของ $f(x, y, z)$ บนทรงตัน E สามารถหาค่าได้โดย

$$\begin{aligned}\iiint_E f(x, y, z)dV &= \iint_R \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dA \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)r\,dz\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

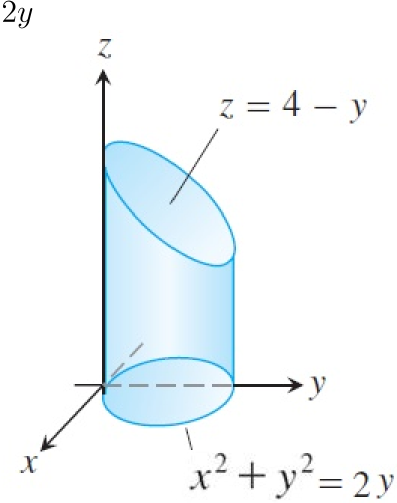
ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาค่าของ $\iiint_E y\,dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = x + 2$ อยู่เหนือระนาบ XY และอยู่ระหว่างทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 = 9$



ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$



ตัวอย่าง 6.3.3 จงเขียน $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$ ในรูปอินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = 4 - y$ และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2y$



6.4 อินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in spherical coordinates)

พิจารณาทรงตัน E ที่อธิบายด้วยพิกัดทรงกลม

$$E = \{(\rho, \theta, \phi)/a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

เมื่อ $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$ และ $d - c \leq \pi$ เราจะหาค่าของ $\iiint\limits_E f(x, y, z)dV$ โดยเริ่มจากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น l ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle\rho = \dfrac{b-a}{l}$ จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น m ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle\theta = \dfrac{\beta - \alpha}{m}$ และสุดท้ายแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle\rho = \dfrac{d-c}{n}$ จากการแบ่งดังกล่าวเราจะได้กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัดทรงกลม lmn กล่อง โดยแต่ละกล่องมีปริมาตรเท่ากัน ถ้าให้ $\triangle V_{ijk}$ แทนปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้ากล่องที่ ijk จะได้ว่า

$$\boxed{\triangle V_{ijk} = \rho_i^2 \sin\phi_k \triangle\rho\triangle\phi\triangle\theta}$$

ดังรูป

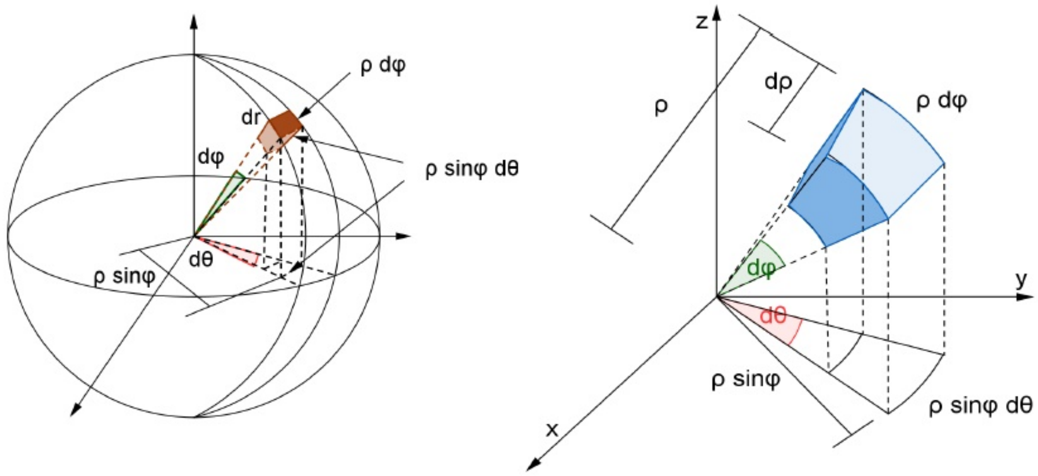


Figure 7: The Spherical wedge

เรานิยาม $\iiint\limits_E f(x, y, z)dV$ ในรูปของผลบวกรีมานน์ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_E f(x,y,z)dV \\
&\qquad = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\triangle V_{ijk} \\
&\qquad = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_i \sin\phi_k \cos\theta_j, \rho_i \sin\phi_k \sin\theta_j, \rho_i \cos\phi_k)\rho_i^2 \sin\phi_k \triangle\rho\triangle\phi\triangle\theta
\end{aligned}$$

ดังนั้นการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เหนือทรงตัน E ในพิกัดทรงกลมสามารถทำได้ดังนี้

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงใช้พิกัดทรงกลมหาค่าของ $\iiint\limits_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ เมื่อ E เป็นทรงกลมรัศมี 1 หน่วย

รูปต่อไปนี้แสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 6.3.1

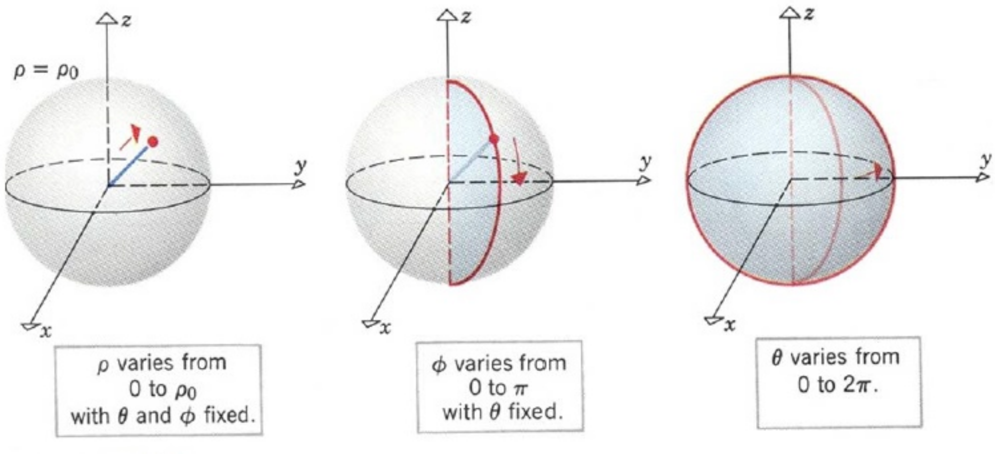
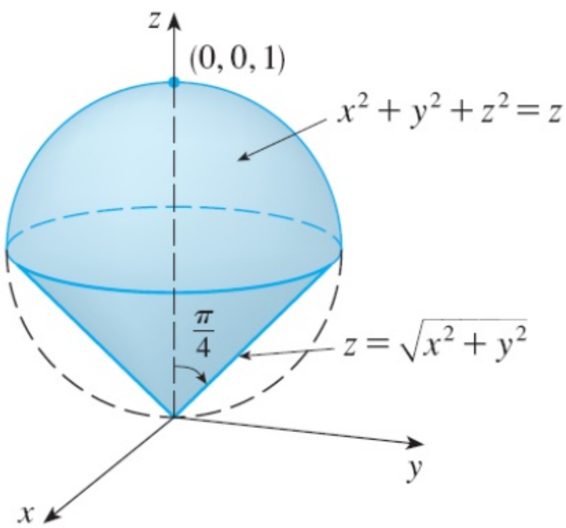


Figure 8: An animation of a sphere with radius ρ_0

ตัวอย่าง 6.4.2 จงใช้พิกัดทรงกลมหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และปิดล้อมด้านบนด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ดังรูป



รูปต่อไปนี้แสดงการเกิดทรงตันในตัวอย่าง 6.4.2

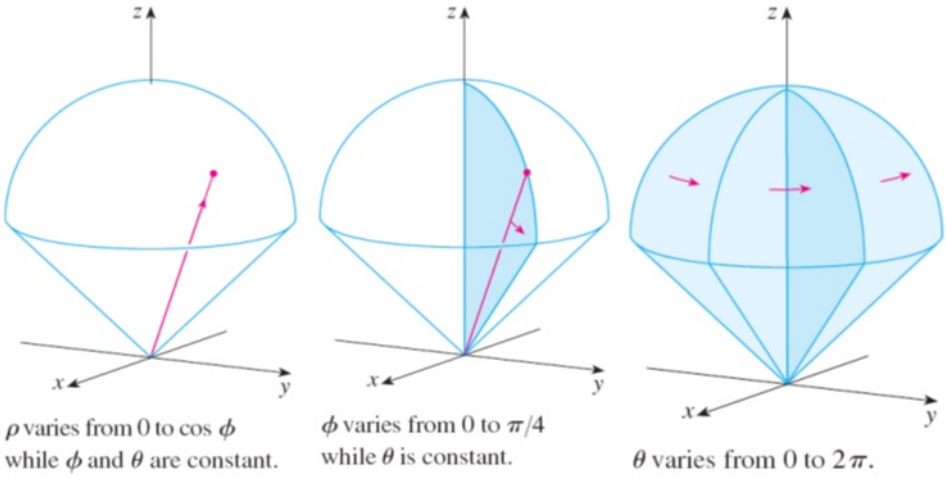
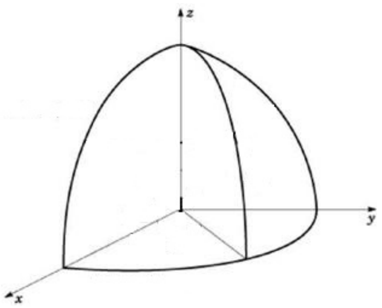
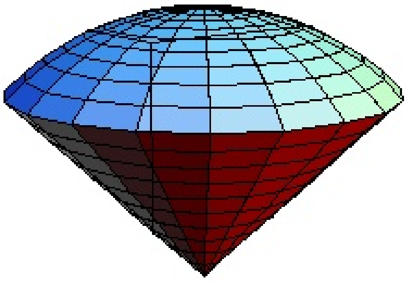
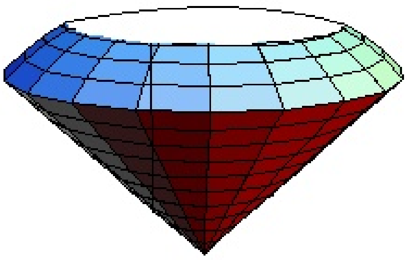
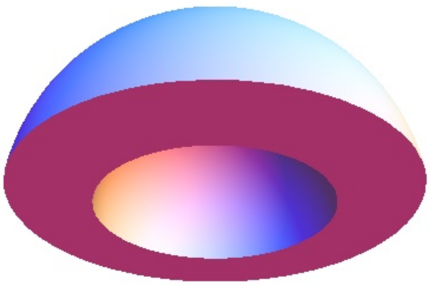


Figure 9: An animation of the solid in example 6.4.1

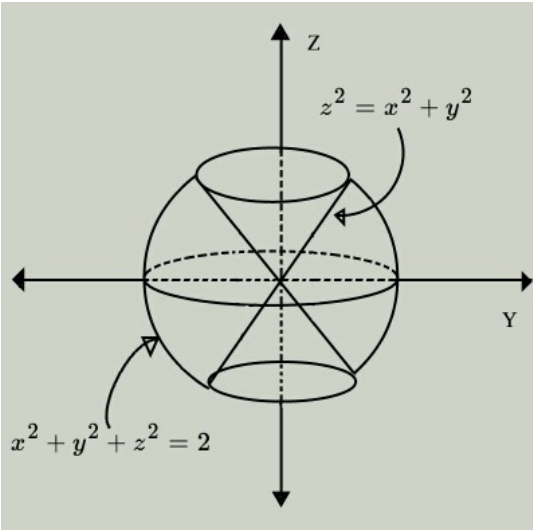
เราสามารถอาศัยแนวทางต่อไปนี้ในการใส่ลิมิตการอินทิเกรตในพิกัดทรงกลม

ทรงตัน	**การใส่ลิมิตการอินทิเกรต**
ส่วนของครึ่งทรงกลมรัศมี ρ_0 ในออคแทนท์ที่ 1 	

ทรงตัน	การใส่ลิมิตการอินทิเกรต
รูปกรวยไอศครีมที่ปิดด้านบนด้วยทรงกลม $\rho = \rho_0$ ด้านล่างด้วยกรวย $\phi = \phi_0$ 	
รูปกรวยที่ปิดด้านบนด้วยทรงกลม $\rho = \rho_0$ อยู่ระหว่างกรวย $\phi = \phi_1$ และ $\phi = \phi_2$ 	
อยู่ระหว่างครึ่งทรงกลมศูนย์กลางร่วม $\rho = \rho_1$ และ $\rho = \rho_2$ 	

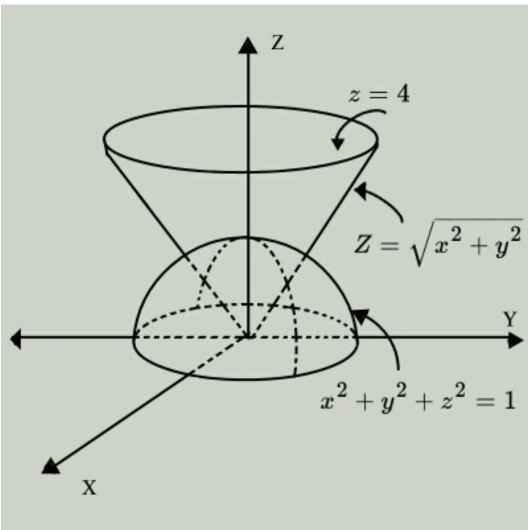
ตัวอย่าง 6.4.3 จงเขียนปริมาตรของทรงตันต่อไปนี้ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

(1) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้วยกรวย $z^2 = x^2 + y^2$ และทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ดังรูป



$V =$ . . . .

(2) ทรงตัน E ที่ปิดล้อมด้านล่างด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ด้านบนด้วยระนาบ $z = 4$ และด้านข้างด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ดังรูป



$V =$ . . . .

ตัวอย่าง 6.4.4 กำหนดอินทิกรัลสามชั้นในพิกัดฉาก

$$I = \int_{-3}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

จงเขียนอินทิกรัลนี้ ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในพิกัดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

(1) พิกัดทรงกระบอก

$I =$ . . . .

(2) พิกัดทรงกลม

$I =$ . . . .

ตัวอย่าง 6.4.5 จงเลือกใช้พิกัดทรงกระบอกหรือทรงกลม (ที่เหมาะสม) เพื่อหาค่าต่อไปนี้

1. $\iiint\limits_E e^z dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $z = 1 + x^2 + y^2$ ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 5$ และระนาบ XY

2. $\iiint\limits_E x^2 dV$ เมื่อ E คือทรงตันที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ และ $y = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$