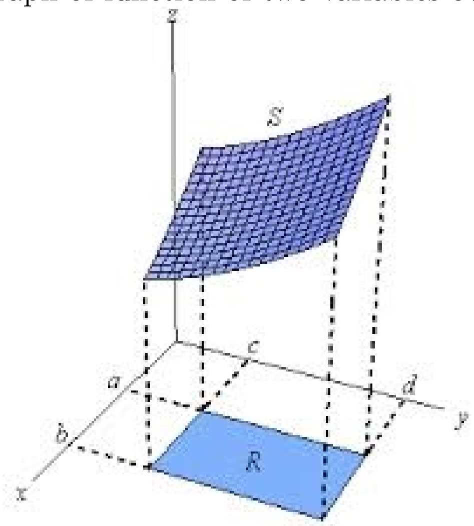
บทที่ 5 อินทิกรัลสองชั้น

5.1 อินทิกรัลสองชั้น (Double Integrals)

พิจารณาฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x, y)$ ที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\boxed{R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}}$$

Figure 1: Graph of function of two variables over rectrangle



สมมติว่า $f(x, y) \geq 0$ ให้ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R นั่นคือ

$$\boxed{S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}}$$

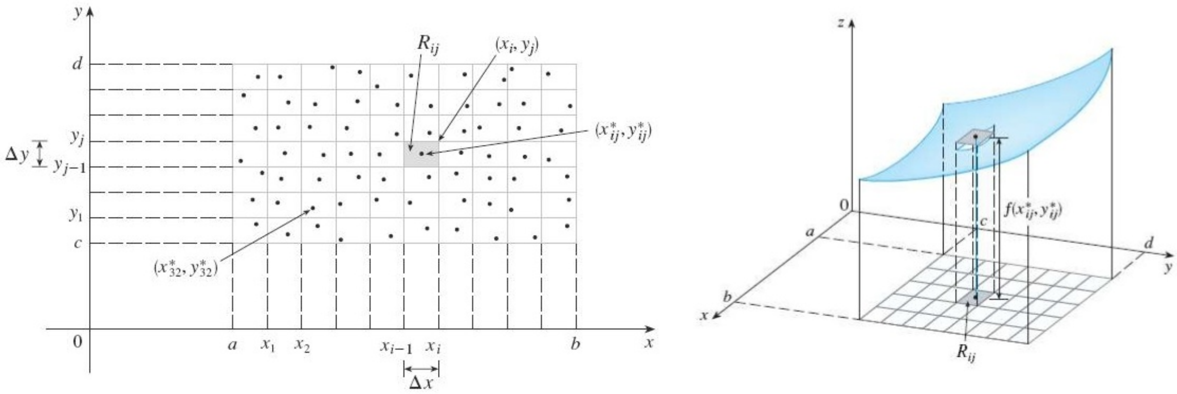
เราจะทำการหาปริมาตรของทรงตัน S โดยเริ่มต้นจากการแบ่งบริเวณ R ออกเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} ซึ่งได้จากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงแต่ละช่วงกว้าง $\triangle x = \dfrac{b-a}{m}$ และแบ่งช่วงปิด $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\triangle y = \dfrac{d-c}{n}$

จากการแบ่งบริเวณ R ดังข้างต้น จะได้ว่าบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} แต่ละชิ้นมีพื้นที่เป็น $\triangle A = \triangle x \triangle y$

ให้ (x_{ij}^*, y_{ij}^*) เป็นจุดบนบริเวณ R_{ij} ให้ S_{ij} เป็นแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหนือบริเวณ R_{ij} ที่มีความสูง $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ จะได้ว่า S_{ij} มีปริมาตรเป็น

$$\boxed{V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \triangle A}$$

Figure 2: Rectrangular grid partitioning the region R into small rectangles



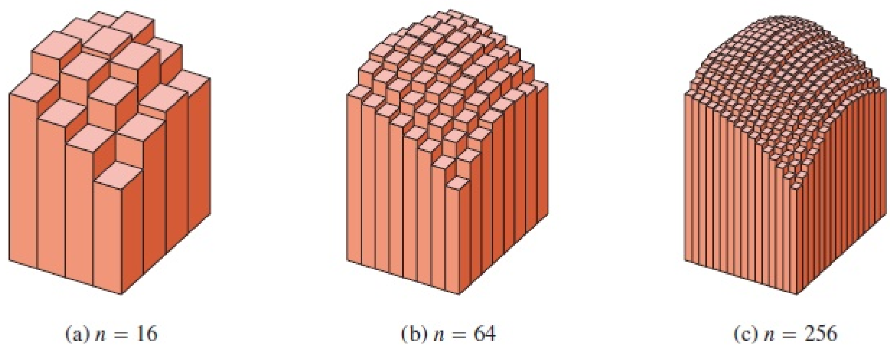
จะเห็นว่าถ้าให้ V แทนปริมาตรของทรงตัน S เราสามารถประมาณค่าของ V ได้โดย

$$\boxed{V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\triangle A}$$

การประมาณค่าของ V ข้างต้นจะใกล้เคียงค่าจริงมากขึ้นหากเราเลือก m และ n ให้มีค่ามากขึ้นด้วย ดังนั้น

$$\boxed{V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\triangle A}$$

Figure 3: As n increases, the Riemann sum approximations approach the total volume



นิยาม 5.1.1 ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R อินทิกรัลสองชั้นของ f เหนือบริเวณ R กำหนดโดย

$$\boxed{\iint\limits_{R} f(x, y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\triangle A}$$

จากนิยาม 5.1.1 เราจะได้ว่า ปริมาตร V ของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และ

อยู่เหนือบริเวณ R หาได้จาก

$$\boxed{V = \iint\limits_R f(x,y)dA}$$

คุณสมบัติของอินทิกรัลสองชั้น

1. $\iint\limits_R \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) dA = \iint\limits_R f(x,y)dA \pm \iint\limits_R g(x,y)dA$
2. $\iint\limits_R cf(x,y)dA = c\iint\limits_R f(x,y)dA$

5.2 การหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น (Iterated Integrals)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปร เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a,b] \times [c,d]$ เราให้สัญลักษณ์ $\int_c^d f(x,y)dy$ แทนการอินเกรตฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ เรียกการอินทิเกรตดังกล่าวว่า **การอินทิเกรตย่อย (partial integration)** ให้

$$\boxed{A(x) = \int_c^d f(x,y)dy}$$

เราจะได้ว่า

$$\boxed{\int_a^b A(x) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx}$$

นั่นคือ $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$ หมายถึงการอินเกรตฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ โดยให้ตัวแปร x คงที่ก่อน จากนั้นจึงอินเกรตฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ ในทำนองเดียวกัน

$$\boxed{\int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dy\right) dx}$$

หมายถึงการอินเกรตฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ โดยให้ตัวแปร y คงที่ก่อน จากนั้นจึงอินเกรตฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

(1) $\displaystyle\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy dx$

ทฤษฎีบท 5.2.2 (Fubini's Theorem) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปร เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ แล้ว

$$\iint\limits_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\int_1^{\ln 5} \int_0^{\ln 2} e^{2x+y} dx dy$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\iint_R y\sin(xy)dA$ เมื่อ $R = [1, 2] \times [0, \pi]$

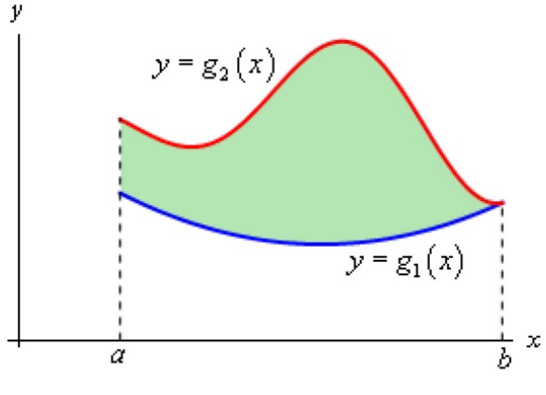
ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวพาราโบลอยด์ $x^2 + 2y^2 + z = 16$, ระนาบ $x = 2$ และระนาบ $y = 2$ และระนาบพิกัดทั้งสาม

5.3 อินทิกรัลสองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่นิยามเหนือบริเวณ R ที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราสามารถหาค่าอินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณ R, $\displaystyle\iint_R f(x, y)dA$ ได้โดยการจำแนกบริเวณ R ออกเป็น 2 ชนิดดังต่อไปนี้

บริเวณชนิดที่ 1 (type I regions)

Figure 4: Type I region

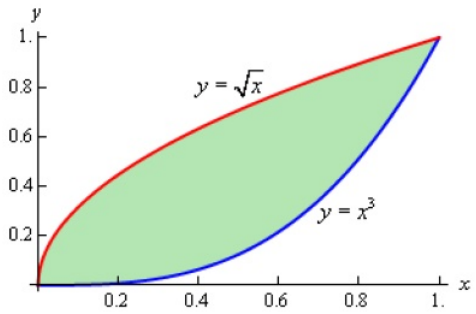


บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y = g_2(x)$ ปิดล้อมด้านล่างด้วยเส้นโค้ง $y = g_1(x)$ โดยที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ นั่นคือ $R = \{(x,y)/a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ดังรูป

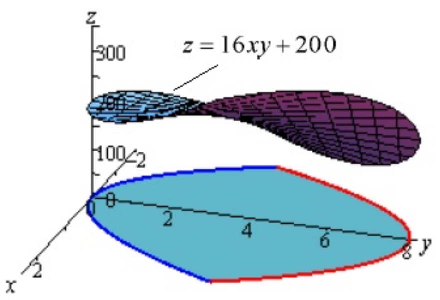
อินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 1 หาค่าได้ดังนี้

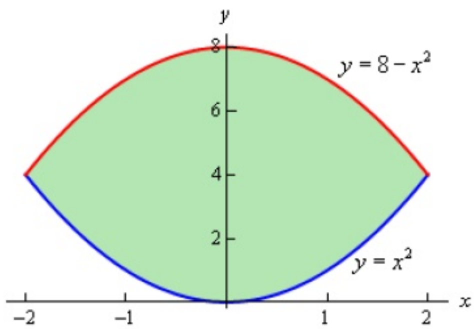
$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx}$$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาค่าของ $\iint\limits_R (4xy - y^3)dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$



ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16xy + 200$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ และ $y = 8 - x^2$

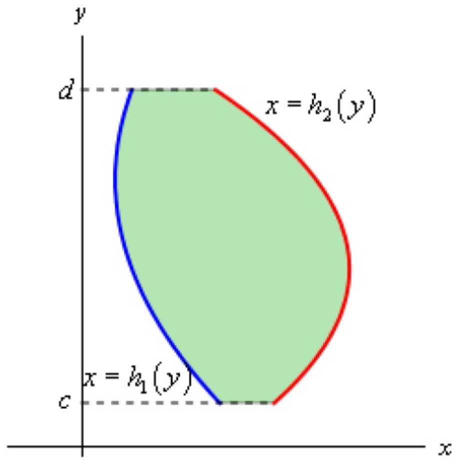




บริเวณชนิดที่ 2 (type II regions)

บริเวณชนิดนี้คือบริเวณที่ปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และเส้นโค้ง $x = h_2(y)$ โดยที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ และปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ตามลำดับ นั่นคือ $R = \{(x, y)/h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$ ดังรูป

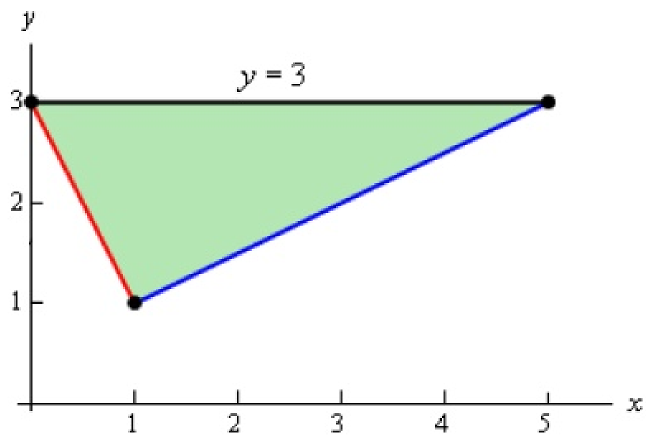
Figure 5: Type II region



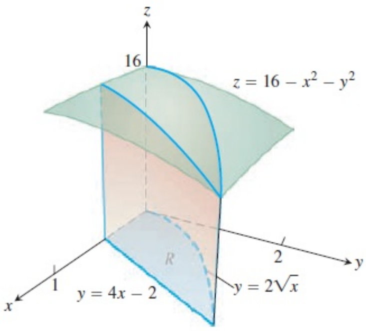
อินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เหนือบริเวณชนิดที่ 2 หาค่าได้ดังนี้

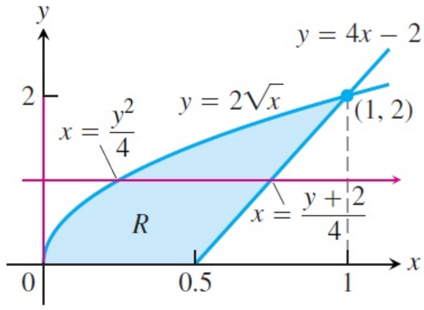
$$\boxed{\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy}$$

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาค่าของ $\iint\limits_R (6x^2 - 40y)dA$ เมื่อ R คือสามเหลี่ยมบนระนาบ XY ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 3), (1, 1)$ และ $(5, 3)$

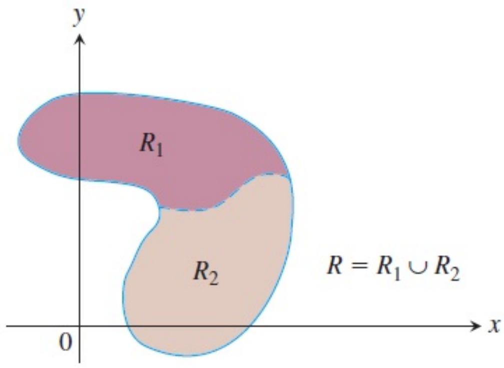


ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วยพื้นผิว $z = 16 - -x^2 - y^2$ และอยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ XY ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = 4x - 2$





ถ้า $R = R_1 \cup R_2$ โดยที่ R_1 และ R_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนทับกัน ดังรูป



แล้ว

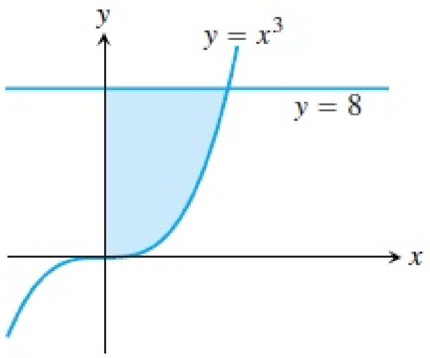
$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA}$$

ตัวอย่าง 5.3.5 จากตัวอย่าง 5.3.3 จงใส่ลิมิตของการอินทิเกรตสำหรับการหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_R f(x,y)dA$ โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อกำหนดให้พิจารณาบริเวณ R ในตัวอย่าง 5.3.3 เป็นบริเวณชนิดที่ 1

$$\iint_R f(x,y)dA = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงเขียนอินทิกรัลสองชั้น $\iint\limits_R f(x,y)dA$ ในลำดับการอินทิเกรตที่กำหนดให้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า เมื่อกำหนดให้พิจารณาบริเวณ R ดังต่อไปนี้

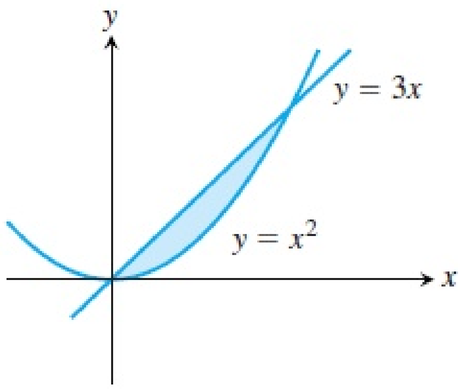
(1)



$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iint\limits_R f(x,y)dydx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

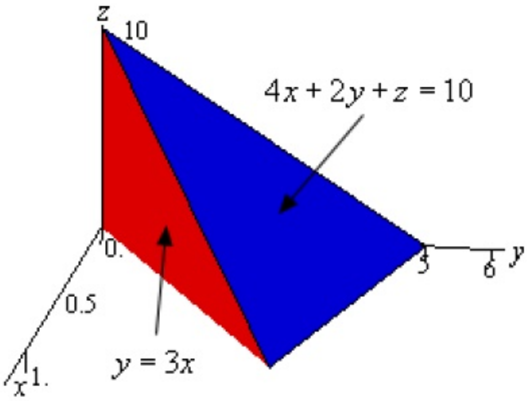
(2)

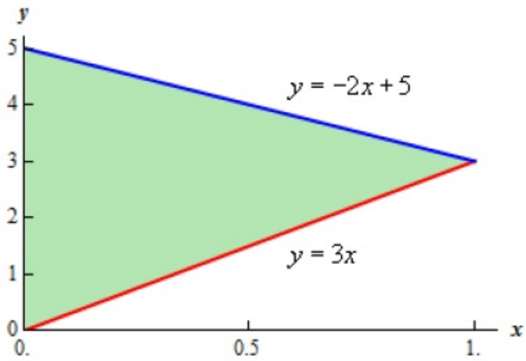


$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iint\limits_R f(x,y)dydx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $4x + 2y + z = 10, y = 3x, z = 0$ และระนาบ $x = 0$





ตัวอย่าง 5.3.8 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

(1) $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dydx$

(2) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}dxdy$

5.4 พื้นที่ในรูปอินทิกรัลสองชั้น (Area by double integration)

พิจารณาทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $z = f(x,y) = 1$ และอยู่เหนือบริเวณ R เราสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้โดย

$$\boxed{V = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R 1dA = \iint_R dA}$$

แต่

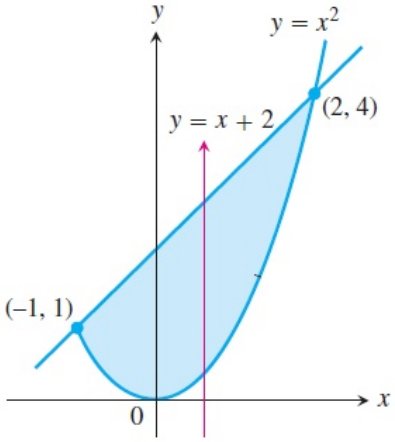
$$\boxed{V = \text{ ความสูง } \times \text{ พื้นที่ฐาน } = 1 \times \text{ พื้นที่ฐาน}}$$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R หาได้โดย

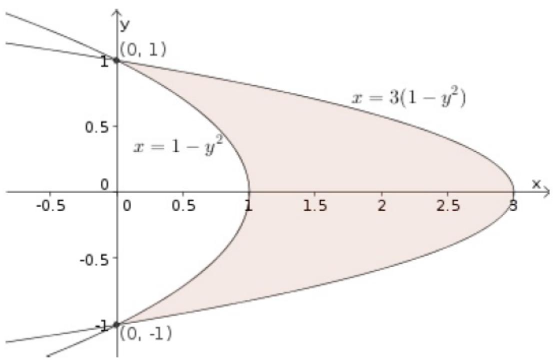
$$\boxed{A = \iint_R dA}$$

ตัวอย่าง 5.4.1 จงใช้อินทิกรัลสองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณดังรูปต่อไปนี้

(1)



(2)

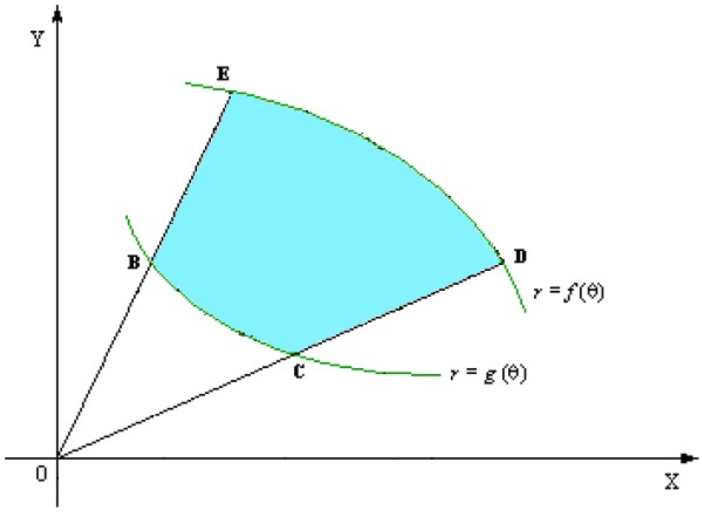


ตัวอย่าง 5.4.2 จงใช้อินทิกรัลสองชั้นคำนวณพื้นที่ของบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \ln x$, $y = 2\ln x$ และ $x = e$ ในควอแดนท์ที่ 1

5.5 อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

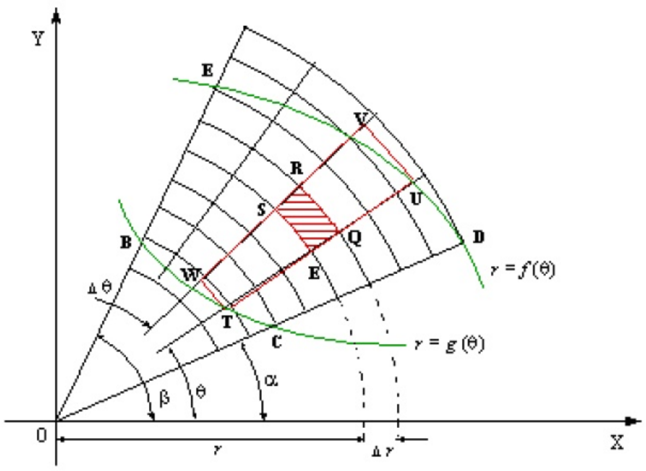
ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาอินทิกรัลสองชั้นของ $f(x,y)$ เหนือบริเวณ R ที่เป็นบริเวณเชิงขั้ว โดยเราจะเริ่มพิจารณาจากบริเวณ $R = \{(r,\theta)/g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ดังรูป

Figure 6: Region in polar coordinate



เราสามารถหาค่าของ $\iint\limits_R f(x,y)dA$ ได้โดยเริ่มต้นจากการแบ่งช่วงปิด $[C,D]$ ออกเป็น m ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[r_{i-1}, r_i]; 1 \leq i \leq m, r_0 = C, r_m = D$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\triangle r = \dfrac{D-C}{m}$ เท่าๆกัน จากนั้นแบ่งช่วงปิด $[\alpha,\beta]$ ออกเป็น n ช่วง เรียกแต่ละช่วงว่าช่วงปิด $[\theta_{j-1}, \theta_j]; 1 \leq j \leq n, \theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta$ โดยที่แต่ละช่วงกว้าง $\triangle\theta = \dfrac{\beta - \alpha}{n}$ ดังรูป

Figure 7: Breaking up the region into a mesh of radial lines and arcs



จากการแบ่งดังกล่าวทำให้เราสามารถแบ่งบริเวณ R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าในเชิงขั้ว R_{ij} หลายๆ

รูปที่มีขนาดเท่ากัน จะเห็นว่า $R_{ij} = \{(r,\theta)/r_{i-1} \le r \le r_i, \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$ ให้

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \text{และ} \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

จะเห็นว่าจุด (r_i^*, θ_j^*) จะเป็นจุดบน R_{ij} และถ้าให้ $\triangle A_{ij}$ แทนพื้นที่ของ R_{ij} เราจะได้ว่า

$$\triangle A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2\triangle\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\triangle\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\triangle\theta = r_i^*\triangle r\triangle\theta$$

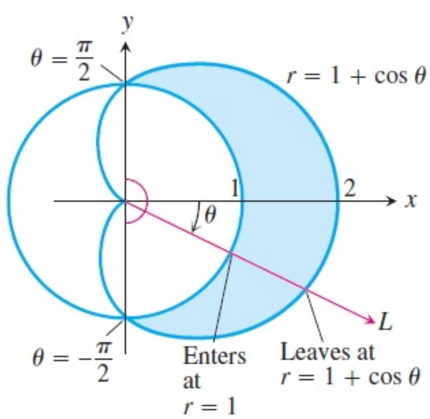
ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &\approx \lim_{i,j\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\triangle A_{ij} \\
&= \lim_{i,j\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\triangle r\triangle\theta \\
&= \int_\alpha^\beta\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta
\end{aligned}$$

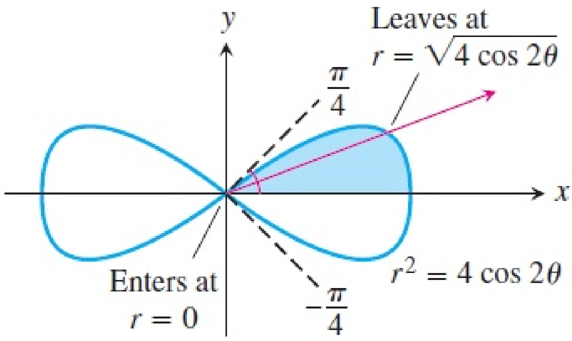
นั่นคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเหนือบริเวณเชิงขั้ว $R = \{(r,\theta)/g(\theta) \le r \le f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$ แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

ตัวอย่าง 5.5.1 จงเขียนลิมิตของการอินทิเกรตในการหาค่าของ $\iint_R f(r,\theta)dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่อยู่ภายในคาร์ดิออยด์ $r = 1 + \cos\theta$ และภายนอกวงกลม $r = 1$



ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งเลมนิสเคต $r^2 = 4\cos 2\theta$

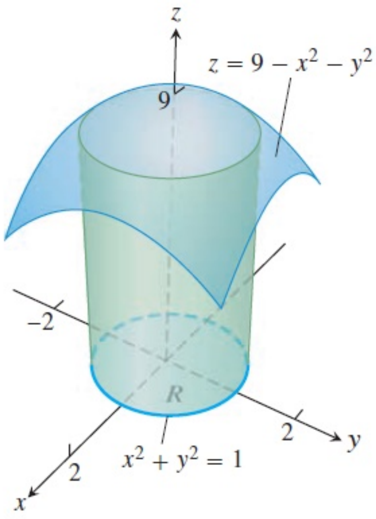


ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาค่าของ $\iint\limits_R e^{x^2+y^2}dydx$ เมื่อ R คือบริเวณที่ครึ่งวงกลมที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = \sqrt{1-x^2}$

ตัวอย่าง 5.5.4 จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dydx$$

ตัวอย่าง 5.5.5 จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพาราโบลอยด์ $z = 9 - x^2 - y^2$ อยู่เหนือระนาบ XY และอยู่ในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$



ตัวอย่าง 5.5.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณ R บนระนาบ ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เส้นตรง $y = 1$ และเส้นตรง $y = \sqrt{3}x$