

แบบฝึกหัดสำหรับปลายภาค ชุดที่ 2

1. กำหนดฟังก์ชันในรูปเชิงขั้ว $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$

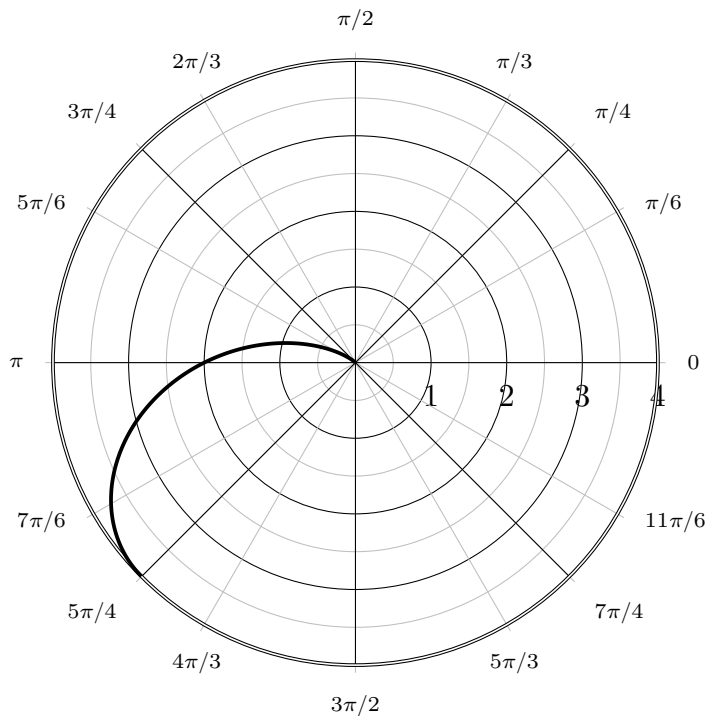
1.1. จงแสดงว่ากราฟของ $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$ ไม่สมมาตร กับแกน y โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$

1.2. จงแสดงว่ากราฟของ $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$ สมมาตร กับจุดกำเนิดโดยแทน θ ด้วย $\pi + \theta$

1.3. กำหนดข้อมูลในตารางของกราฟ $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
r	4	3.73	2	0.27	0

และกำหนดกราฟในช่วง $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ ดังรูป จงวาดกราฟในช่วง $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ โดยใช้ข้อมูลจากตารางที่กำหนดให้ จากนั้นให้ใช้การสมมาตรกับจุดกำเนิดวาดกราฟทั้งหมดของ $r = 2 + 2 \sin(2\theta)$ ในช่วง $[0, 2\pi]$



2. จงเขียนจุด $P(x, y, z) = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ ในพิกัดฉากให้อยู่ในพิกัดที่กำหนด

2.1. พิกัดทรงกระบอก $P(r, \theta, z) = \dots\dots\dots$

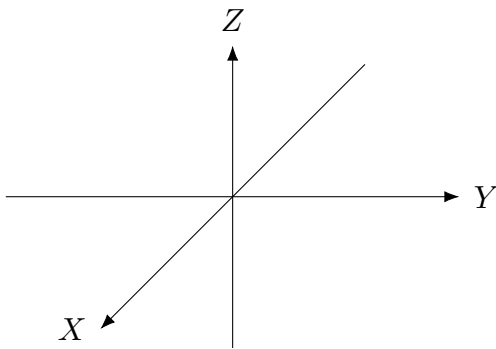
2.2. พิกัดทรงกลม $P(\rho, \phi, \theta) = \dots\dots\dots$

3. กำหนดสมการใน 3 มิติ ให้เลือกสมการในข้อ A – H ที่มีรูปเหมือนกันกับสมการในข้อ ก.- ง. มาเติมในช่องว่างที่เว้นไว้ และวาดกราฟของข้อ ก. และ ข.

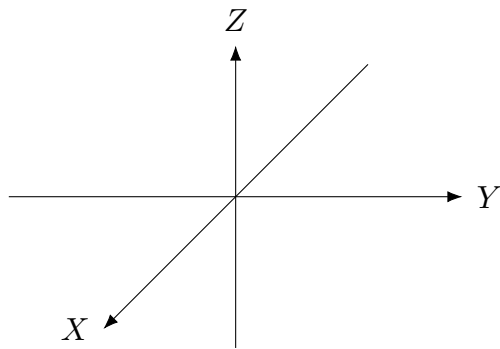
- เลือก A – H
- ก. $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ _____
- ข. $x = \sqrt{3} y$ _____
- ค. $\rho = 2$ _____
- ง. $x^2 + y^2 = 4$ _____

- A. $\phi = \pi/6$
- B. $\phi = \pi/3$
- C. $\theta = \pi/6$
- D. $\theta = \pi/3$
- E. $r^2 + z^2 = 4$
- F. $r^2 + z^2 = 2$
- G. $\rho \sin \phi = 4$
- H. $\rho^2 \sin^2 \phi = 4$

กราฟของข้อ ก.



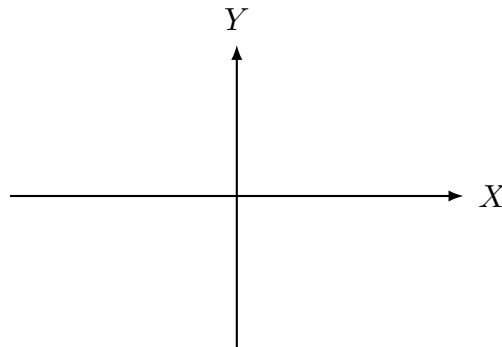
กราฟของข้อ ข.



4. กำหนดอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

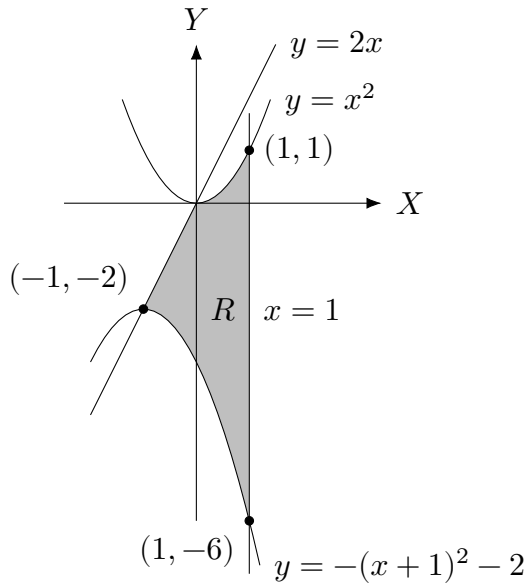
$$H = \iint_R f(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 y \cos\left(\frac{\pi x^5}{2}\right) \, dx dy$$

4.1. จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ R ที่สอดคล้องกับ H (ระบุจุดตัดให้ชัดเจน)

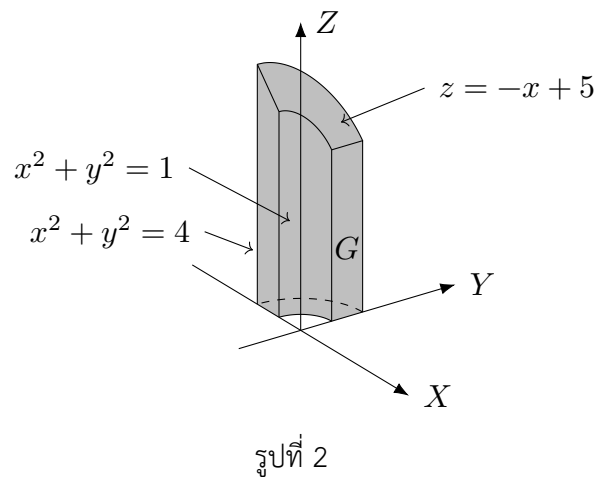
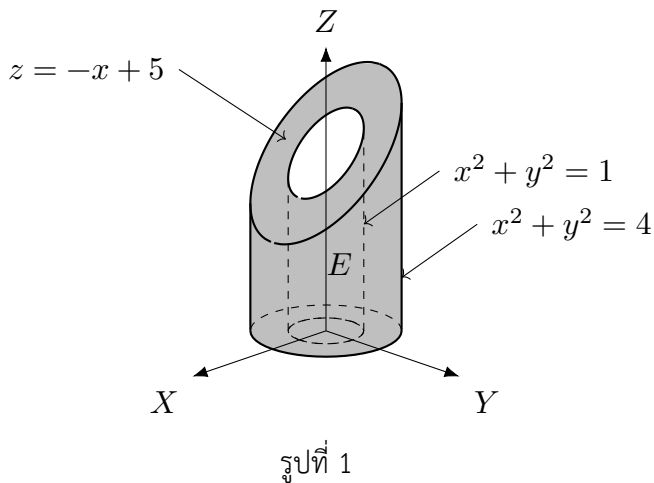


4.2. จงหาค่าของ $H = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 y \cos\left(\frac{\pi x^5}{2}\right) \, dx dy$

5. กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป จงใช้อินทิกรัลสองชั้นคำนวณหาพื้นที่ R



6. กำหนดให้ E เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $z = -x + 5$ ด้านล่างด้วยระนาบ $z = 0$ ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ และ ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ ดังรูปที่ 1



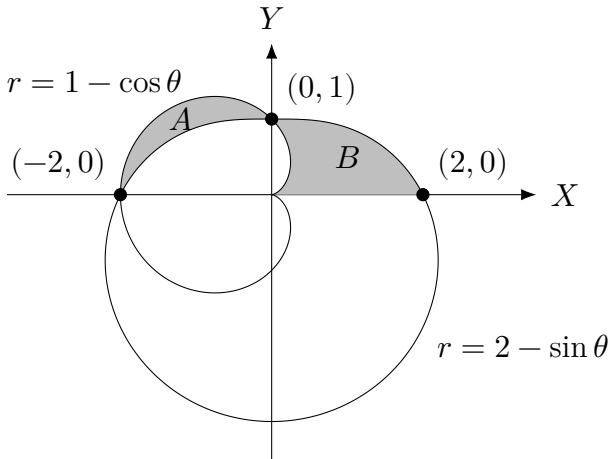
6.1. จงเขียนปริมาตรของทรงตัน E ในรูปของ อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

ปริมาตร $E = \dots\dots\dots$

6.2. ให้ G เป็นส่วนของทรงตัน E ในออกแทนต์ที่ 2 ($x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ดังรูปที่ 2 จงเขียนปริมาตรของ G ในรูปของ อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดฉาก โดยไม่ต้องคำนวณค่า

ปริมาตร $E = \dots\dots\dots$

7. กำหนดบริเวณ A และ B ดังรูป



7.1. จงเขียนพื้นที่ A ในรูปของอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

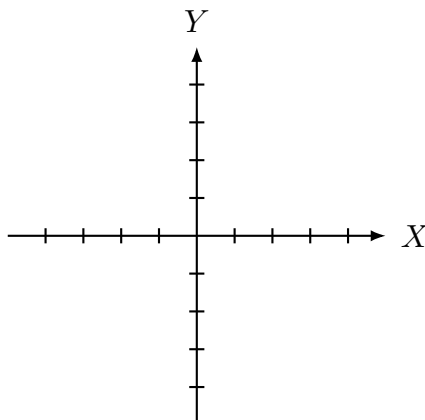
$A = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

7.2 จง คำนวณ หาพื้นที่ B โดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

8. กำหนดให้ R เป็นบริเวณในปริภูมิสองมิติ ที่มีพื้นที่ A ตารางหน่วย โดยที่

$$A = \int_0^{1/(2\sqrt{2})} \int_y^{\sqrt{(1/4)-y^2}} dx dy + \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx dy$$

8.1. จงวาดรูปและแรเงาบริเวณ R

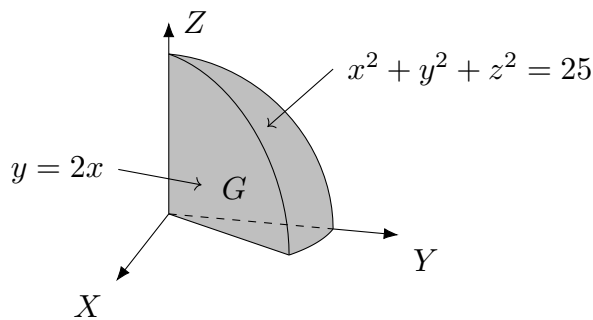


8.2. จงเขียน A ในรูปของอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยไม่ต้องคำนวณค่า

.....

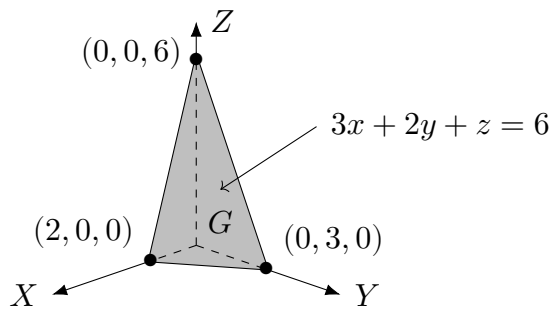
9. จงเขียนอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก $\iiint_G f(x, y, z) \, dV$ เมื่อ G เป็นทรงตันที่กำหนดให้ดังรูป ในลำดับการอินทิเกรตที่กำหนดให้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

9.1. G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ระนาบ $y = 2x$ ระนาบ $z = 0$ และระนาบ $x = 0$



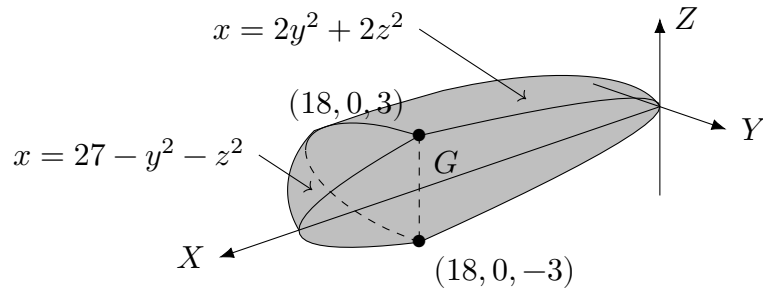
$$\iiint_G f(x, y, z) \, dzdydx = \dots\dots\dots$$

9.2. G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $3x + 2y + z = 6$ ระนาบ $z = 0$ ระนาบ $y = 0$ และระนาบ $x = 0$



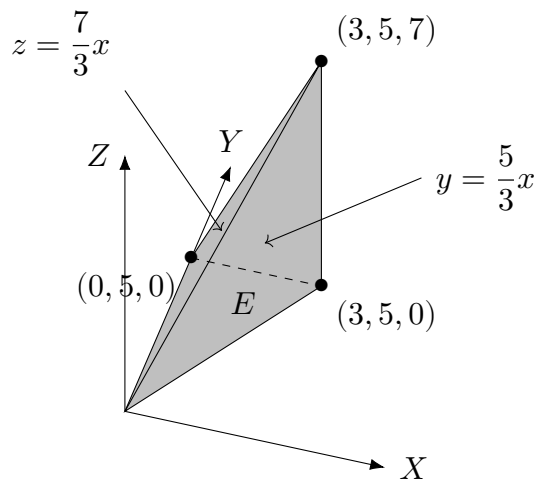
$$\iiint_G f(x, y, z) \, dydxz = \dots\dots\dots$$

- 9.3. G เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $y = 0$ พื้นผิวพาราโบลอยด์ $x = 2y^2 + 2z^2$ และ $x = 27 - y^2 - z^2$



$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy = \dots\dots\dots$$

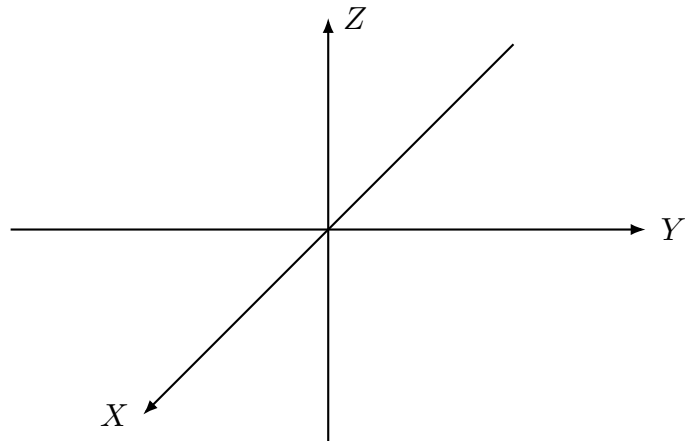
10. กำหนดให้ E เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $z = \frac{7}{3}x$ ระนาบ $y = \frac{5}{3}x$ ระนาบ $y = 5$ และระนาบ $z = 0$ มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(3, 5, 0)$ และ $(3, 5, 7)$ ดังรูป จงใช้ อินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก คำนวณปริมาตรของ E



11. กำหนดอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$I = \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{3-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

- 11.1. จงเขียนกราฟของทรงตัน E ที่สอดคล้องกับ I (ระบุจุดตัดให้ชัดเจน)



11.2. จงเขียน I ในลำดับการอินทิเกรตต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$I = \iiint_E f(x, y, z) \, dydzdx = \dots\dots\dots$$

12. กำหนดอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก $H = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-r}^r e^{r^2} r \, dzdrd\theta$

จงเขียน H ในระบบพิกัดต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

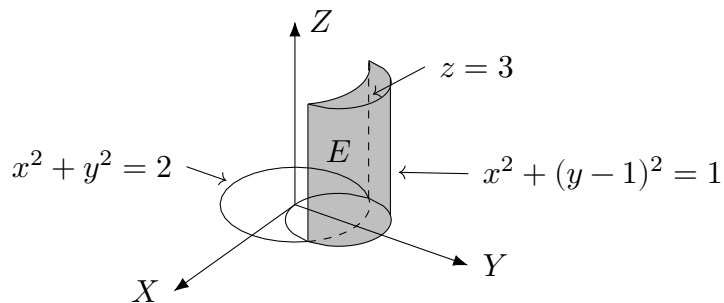
12.1. ระบบพิกัดฉาก

$$H = \dots\dots\dots$$

12.2. ระบบพิกัดทรงกลม

$$H = \dots\dots\dots$$

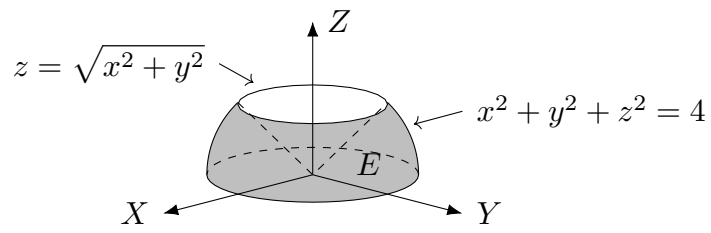
13. กำหนดให้ E เป็นทรงตันที่ด้านบนปิดล้อมด้วยระนาบ $z = 3$ ด้านล่างด้วยระนาบ $z = 0$ อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ และอยู่นอกทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2$ ดังรูป



จงเขียนปริมาตรของ E ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$\text{ปริมาตร } E = \dots\dots\dots$$

14. กำหนดให้ E เป็นทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ พื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และระนาบ $z = 0$ ดังรูป



จงเขียนอินทิกรัลสามชั้น $I = \iiint_E z\sqrt{x^2 + y^2} \, dV$ ในระบบพิกัดต่อไปนี้ โดยไม่ต้องคำนวณค่า

- 14.1. พิกัดกระบอก

$$I = \dots\dots\dots$$

- 14.2. พิกัดทรงกลม

$$I = \dots\dots\dots$$