กระบวนวิชาสัมมนา ว.คณ. 390 (MATH390)

โดย นางสาวดิสครีต วิยุต รหัสประจำตัวนักศึกษา : 6x051xxxx

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 25xx อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.xxxx xxxx

1. ชื่อหัวข้อ :

(ไทย) จำนวนครอบงำของบางกราฟ

(อังกฤษ) Domination number of some graphs

เนื้อหาแปลและเรียบเรียงจาก : Sugumaran A., and Jayachandran E., Domination number of some graphs, IJSDR, 2018; 3: 386-391.

2. เนื้อหา :

2.1. บทนำ

กราฟทั้งหมดที่นำมาพิจารณาเป็นกราฟจำกัด ไม่ระบุทิศทาง ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นซ้อน *กราฟ (graph)* G ประกอบด้วยคู่อันดับ (V, E) ที่ V เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกสมาชิกของเซต V ว่า *จุด (vertex)* และ E เป็นเซตของคู่ไม่อันดับของสมาชิกที่แตกต่างกันของเซต V เรียกสมาชิกของเซต E ว่า *เส้น (edge) ระดับขั้น (degree)* ของจุดในกราฟคือจำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด เขียนแทนด้วย $deg(v)$ การนับการตกกระทบของวงวนจะนับสองครั้ง เรียกจุด $v \in G$ ว่า *จุดแบบเพนแดนต์ (pendant vertex)* หรือ *จุดปลาย (end vertex)* ของกราฟ G ถ้า $deg(v) = 1$ เส้นในกราฟจะเป็น *เส้นแบบเพนแดนต์ (pendant)* เมื่อจุดใดจุดหนึ่งของเส้นนั้นเป็นจุดแบบเพนแดนต์ สำหรับคำศัพท์ในทฤษฎีกราฟอ้างอิงมาจาก Chartrand and Lesniak [4]

การศึกษาเกี่ยวกับเซตครอบงำในทฤษฎีกราฟเริ่มขึ้นเมื่อประมาณปี ค.ศ. 1960 จาก Hedetneimi และ Laskar [8] การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการครอบงำมีมาตั้งแต่ช่วงปี ค.ศ. 1950-1959 เป็นต้นมา แต่การวิจัยเรื่องการครอบงำมีอัตราการเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญในช่วงกลางปี ค.ศ. 1970-1979 ในปี ค.ศ. 1958 Berge [1] ได้นิยามแนวคิดของจำนวนครอบงำของกราฟ เรียกว่า *ค่าสัมประสิทธิ์ของเสถียรภาพภายนอก (coefficient of external stability)* Ore [9] ใช้ชื่อ *"เซตครอบงำ" (dominating set)* และ *"จำนวนครอบงำ" (domination number)* สำหรับแนวคิดเดียวกัน ในปี ค.ศ. 1977 Cockayane และ Hedetneimi [5] [7] และ [8] ได้ทำการสำรวจผลลัพธ์เกี่ยวกับเซตครอบงำของกราฟอย่างครอบคลุมและน่าสนใจ พวกเขาแทนจำนวนครอบงำ

ของกราฟด้วยสัญลักษณ์ $\gamma(G)$ ซึ่งกลายมาเป็นที่นิยมตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา [3]

ในบทความนี้ เราจะพิจารณาเซตครอบงำและจำนวนครอบงำของกราฟบางประเภท ได้แก่ กราฟต้นกล้วย $B(m,n)$ กราฟต้นมะพร้าว $CT(m,n)$ และกราฟประทัด $F(m,n)$

2.2. ความรู้พื้นฐาน

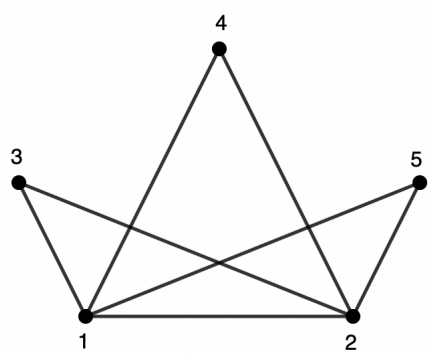
บทนิยาม 2.2.1 *กราฟ (graph)* G ประกอบด้วยคู่อันดับ (V,E) ที่ V เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกสมาชิกของเซต V ว่า *จุด (vertex)* และ E เป็นเซตของคู่ไม่อันดับของสมาชิกที่แตกต่างกันของเซต V เรียกสมาชิกของเซต E ว่า *เส้น (edge)*

บทนิยาม 2.2.2 *ระดับขั้น (degree)* ของจุดในกราฟคือจำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด เขียนแทนด้วย $deg(v)$

บทนิยาม 2.2.3 เรียกจุด $v \in G$ ว่า *จุดแบบเพนแดนต์ (pendant vertex)* หรือ *จุดปลาย (end vertex)* ของกราฟ G ถ้า $deg(v) = 1$ เส้นในกราฟจะเป็น *เส้นแบบเพนแดนต์ (pendant)* เมื่อจุดใดจุดหนึ่งของเส้นนั้นเป็นจุดแบบเพนแดนต์

บทนิยาม 2.2.4 [2], [10] เรียกเซต D ของจุดในกราฟ $G = (V,E)$ ว่า *เซตครอบงำ (dominating set)* ของกราฟ G ถ้าแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดบางจุดใน D สำหรับ $u, v \in V$ จุด u จะถูกครอบงำโดยจุด v เมื่อจุด u ประชิดกับจุด v *จำนวนครอบงำ (domination number)* $\gamma(G)$ ของกราฟ G คือจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดของเซตครอบงำของกราฟ G

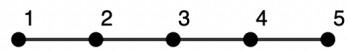
ตัวอย่าง 2.2.5 พิจารณากราฟ G เซตครอบงำเซตหนึ่งคือ $D = \{1\}$ และจำนวนครอบงำคือ $\gamma(G) = 1$



รูปภาพ 1: กราฟ G

บทนิยาม 2.2.6 *กราฟวิถี (path graph)* P_n คือกราฟที่ประกอบด้วย $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ และ $E(P_n) = \{\{u_1, u_2\}\{u_2, u_3\}\{u_3, u_4\}, ..., \{u_{n-1}, u_n\}\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 2.2.7 ตัวอย่างกราฟวิถี P_5



รูปภาพ 2: กราฟวิถี P_5

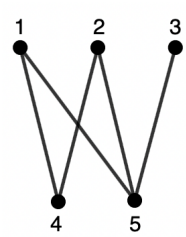
บทนิยาม 2.2.8 [12] *จุดเอกเทศ (isolated vertex)* คือจุดที่มีระดับขั้นเป็น 0

บทนิยาม 2.2.9 [11] *กราฟว่าง (empty graph)* คือกราฟที่ประกอบด้วยจุดเอกเทศและไม่มีเส้น

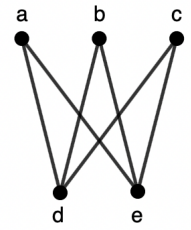
บทนิยาม 2.2.10 [11] ให้ G เป็นกราฟ จะเรียก G ว่า *กราฟสองส่วน (bipartite graph)* ถ้า $V(G)$ สามารถถูก*แบ่ง (partition)* ออกเป็น V_1 และ V_2 (นั่นคือ $V_1 \neq \emptyset$ $V_2 \neq \emptyset$ $V_1 \cup V_2 = V(G)$ และ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) โดยที่ทุกเส้นของ G จะมีปลายข้างหนึ่งตกกระทบกับจุดใน V_1 และปลายอีกข้างหนึ่งตกกระทบกับจุดใน V_2 ใช้สัญลักษณ์ $G(V_1, V_2)$ แทนกราฟสองส่วน

บทนิยาม 2.2.11 [11] ถ้า $G(V_1, V_2)$ เป็นกราฟสองส่วน ซึ่งแต่ละจุดใน V_1 มีเส้นเชื่อมกับทุกจุดใน V_2 แล้ว จะเรียก $G(V_1, V_2)$ ว่า *กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph)*

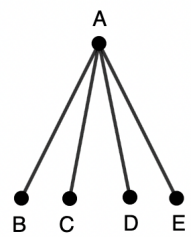
ตัวอย่าง 2.2.12 ตัวอย่างกราฟสองส่วนและกราฟสองส่วนบริบูรณ์



รูปภาพ 3: กราฟสองส่วน G_1 โดยที่ $V_1(G_1) = \{1, 2, 3\}$ และ $V_2(G_1) = \{4, 5\}$



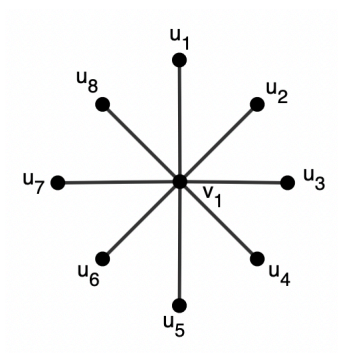
รูปภาพ 4: กราฟสองส่วนบริบูรณ์ G_2 โดยที่ $V_1(G_2) = \{a, b, c\}$ และ $V_2(G_2) = \{d, e\}$



รูปภาพ 5: กราฟสองส่วนบริบูรณ์ G_3 โดยที่ $V_1(G_3) = \{A\}$ และ $V_2(G_3) = \{B, C, D, E\}$

บทนิยาม 2.2.13 [11] เรียกกราฟที่มีจุด 1 จุดและไม่มีเส้น หรือกราฟสองส่วนบริบูรณ์ซึ่ง $|V_1| = 1$ หรือ $|V_2| = 1$ ว่า *กราฟดาว (star graph)* และเรียกจุดในเซตที่มีขนาดเป็น 1 ว่า *จุดศูนย์กลาง (central vertex)*

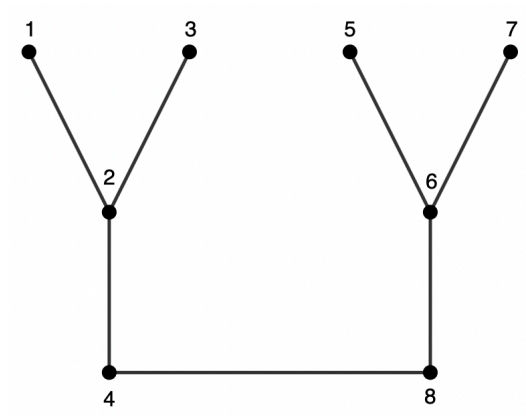
ตัวอย่าง 2.2.14 ตัวอย่างกราฟดาว



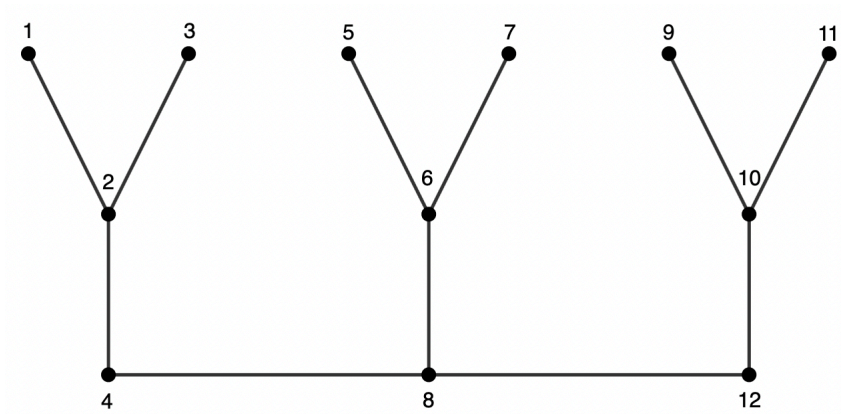
รูปภาพ 6: กราฟดาวที่มีจุดศูนย์กลางคือ v_1

บทนิยาม 2.2.15 *กราฟประทัด (firecracker graph)* $F(m, n)$ เกิดจากกราฟดาว n จุด จำนวน m กราฟเชื่อมต่อกันด้วยการเชื่อมจุดแบบเพนแดนต์สองจุดเข้าด้วยกัน โดยที่ $m \geq 1$ และ $n \geq 2$

ตัวอย่าง 2.2.16 ตัวอย่างกราฟประทัด $F(2,4)$ และ $F(3,4)$



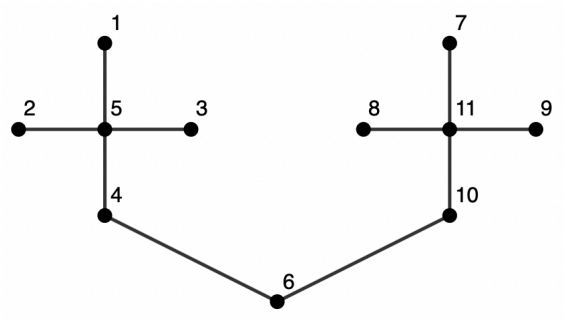
รูปภาพ 7: กราฟประทัด $F(2,4)$



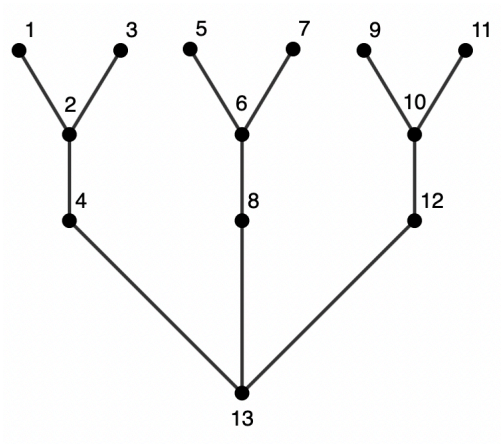
รูปภาพ 8: กราฟประทัด $F(3,4)$

บทนิยาม 2.2.17 *กราฟต้นกล้วย (banana tree graph)* $B(m,n)$ เกิดจากการเชื่อมจุดระดับขั้น 0 หรือจุดแบบเพนแดนต์หนึ่งจุด จากแต่ละกราฟดาว n จุด จำนวน m กราฟ กับจุดยอดใหม่หนึ่งจุด กำหนดให้เป็นรากเดี่ยว b โดยที่ $m \geq 1$ และ $n \geq 1$

ตัวอย่าง 2.2.18 ตัวอย่างกราฟต้นกล้วย $B(2,5)$ และ $B(3,4)$



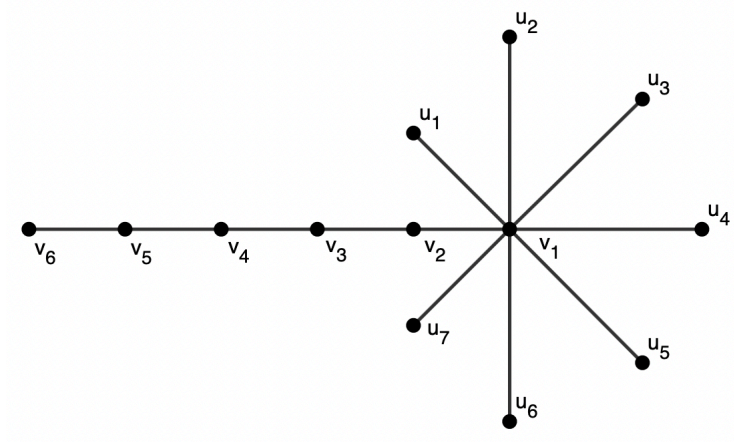
รูปภาพ 9: กราฟต้นกล้วย $B(2,5)$



รูปภาพ 10: กราฟต้นกล้วย $B(3,4)$

บทนิยาม 2.2.19 *กราฟต้นมะพร้าว (coconut tree graph)* $CT(m,n)$ เกิดจากการเชื่อมจุดปลายจุดหนึ่งของกราฟวิถี P_m เข้ากับจุดยอดระดับขั้น 0 จำนวน n จุด โดยที่ $m \geq 1$ และ $n \geq 1$

ตัวอย่าง 2.2.20 ตัวอย่างกราฟต้นมะพร้าว $CT(6,7)$



รูปภาพ 11: กราฟต้นมะพร้าว $CT(6,7)$

บทนิยาม 2.2.21 *ฟังก์ชันพื้น (floor function)* ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$

บทนิยาม 2.2.22 *ฟังก์ชันเพดาน (ceiling function)* ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือน้อยกว่า x เขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$

บทตั้ง 2.2.23 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า $\lceil x+a \rceil = \lceil x \rceil + a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม

บทตั้ง 2.2.24 [6] จำนวนครอบงำของกราฟวิถี P_n คือ $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ สำหรับ $n \geq 1$

2.3. ผลการศึกษา

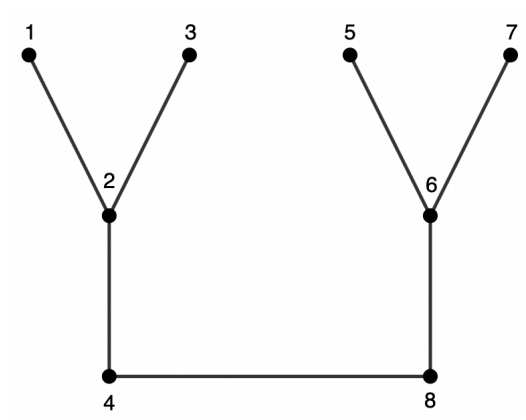
ทฤษฎีบท 2.3.1 จำนวนครอบงำของกราฟประทัด $F(m,n)$ คือ $\gamma(F(m,n)) = m$ เมื่อ $m \geq 1$ และ $n \geq 2$

บทพิสูจน์ : ให้ $G \cong F(m,n)$ เป็นกราฟประทัด จากบทนิยามของกราฟประทัด กราฟ G มาจากกราฟดาว n จุด จำนวน m กราฟ เชื่อมต่อกันด้วยการเชื่อมจุดแบบเพนแดนต์สองจุดเข้าด้วยกัน จะได้ว่า G มีจุด mn จุด และเส้น $mn-1$ เส้น

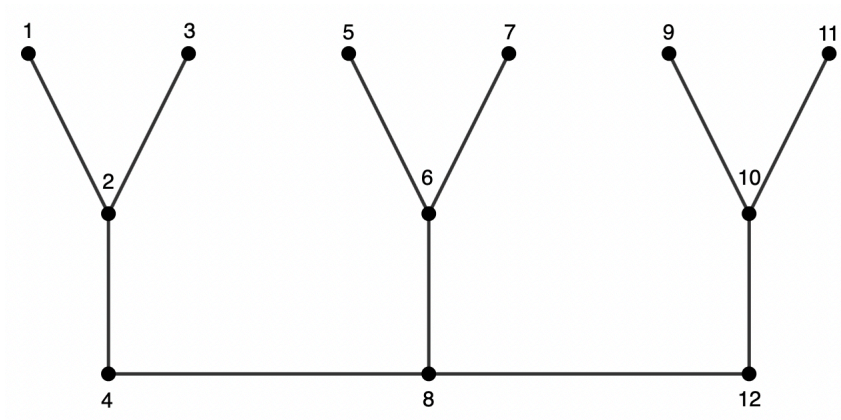
พิจารณาเซตของจุดศูนย์กลางทั้งหมดในกราฟดาวทุกกราฟ เซตนั้นจะครอบงำจุดอื่น ๆ ทั้งหมดในกราฟ G ดังนั้นจะได้เซตครอบงำเซตหนึ่งของกราฟ G คือเซตของจุดศูนย์กลางทั้งหมดใน G ซึ่งมีจำนวนสมาชิกทั้งหมด m ตัว

สมมติให้มีเซตครอบงำของ G มี $m-1$ จุด และมองว่าจุดในกราฟถูกแบ่งออกเป็น m ส่วน โดยแต่ละส่วนจะประกอบด้วยจุดทั้งหมดของกราฟดาวหนึ่งกราฟ แต่ละส่วนจะมีจำนวนจุดในเซตครอบงำเฉลี่ย $\dfrac{m-1}{m}$ จุด แสดงว่าจะมีส่วนที่มีจุดในเซตครอบงำไม่เกิน $\dfrac{m-1}{m}$ จุด นั่นคือมี 0 จุด ทำให้จุดในส่วนนั้นไม่อยู่ในเซตครอบงำ นั่นคือจุดศูนย์กลางในส่วนนั้นจะไม่ถูกครอบงำ เกิดการขัดแย้ง ดังนั้นจะได้เซตครอบงำที่เล็กที่สุดของกราฟ G จะมีสมาชิกทั้งหมด m ตัว และจำนวนครอบงำของกราฟ G คือ m นั่นคือ $\gamma(G) = m$ $\square$

ตัวอย่าง 2.3.2 จำนวนครอบงำของกราฟประทัด $F(2,4)$ และ $F(3,4)$ และตัวอย่างของเซตครอบงำ



รูปภาพ 12: กราฟประทัด $F(2,4)$ $D = \{2,6\}$ และ $\gamma(F(2,4)) = 2$



รูปภาพ 13: กราฟประทัด $F(3,4)$ $D = \{2,6,10\}$ และ $\gamma(F(3,4)) = 3$

ทฤษฎีบท 2.3.3 จำนวนครอบงำของกราฟต้นกล้วย $B(m,n)$ เมื่อ $m \geq 1$ คือ

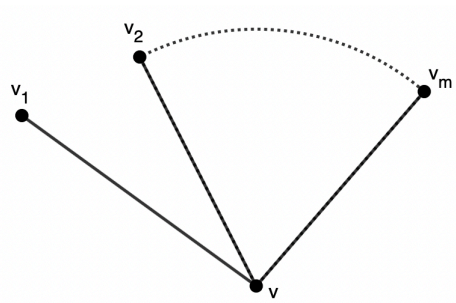
$$\gamma(B(m,n)) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = 1 \\ m & \text{เมื่อ } n = 2 \\ m+1 & \text{เมื่อ } n \geq 3 \end{cases}$$

บทพิสูจน์ : ให้ $G \cong B(m,n)$ เป็นกราฟต้นกล้วย จากบทนิยามของกราฟต้นกล้วย กราฟ G ได้มาจากการเชื่อมจุดระดับขั้น 0 หรือจุดแบบเพนแดนต์หนึ่งจุดจากแต่ละกราฟดาว n จุด จำนวน m กราฟ กับจุดยอดใหม่หนึ่งจุด กำหนดให้เป็นรากเดี่ยว v จะได้ว่า G มีจุด $mn+1$ จุด และเส้น mn เส้น

แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ให้ $n = 1$

ต้องการหาจำนวนครอบงำของกราฟต้นกล้วย $B(m,1)$ ดังรูปที่ 14



รูปภาพ 14: กราฟต้นกล้วย $B(m,1)$

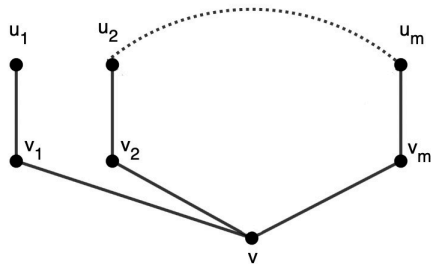
จะได้ว่า $\{v\}$ เป็นเซตครอบงำที่เล็กที่สุดของกราฟ G ดังนั้น $\gamma(G) = 1$

<u>กรณีที่ 2</u> ให้ $n = 2$

ต้องการหาจำนวนครอบงำของกราฟต้นกล้วย $B(m,2)$ ดังรูปที่ 15

เนื่องจากจุด $u_1, u_2, ..., u_m$ จะถูกครอบงำโดย $v_1, v_2, ..., v_m$ ตามลำดับ และจุด v ถูกครอบงำโดยจุด v_1 จะได้ว่า $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ เป็นเซตครอบงำของกราฟ G ซึ่งมีจำนวนสมาชิกในเซตเท่ากับ m

สมมติให้มีเซตครอบงำของ G มี $m-1$ จุด และมองว่าจุดในกราฟถูกแบ่งออกเป็น m ส่วน สำหรับ $1 \leq i \leq m-1$ ให้ S_i ประกอบด้วยจุด v_i และ u_i และ S_m ประกอบด้วยจุด v, v_m และ u_m แต่ละ S_i จะมีจำนวนจุดในเซตครอบงำเฉลี่ย $\dfrac{m-1}{m}$ จุด แสดงว่าจะมี S_i ที่มีจุดในเซตครอบงำไม่เกิน $\dfrac{m-1}{m}$ จุด นั่นคือมี 0 จุด ทำให้จุดในส่วนนั้นไม่อยู่ในเซตครอบงำ นั่นคือ จุด u_i จะไม่โดนครอบงำ เกิดการขัดแย้ง ดังนั้นจะ



รูปภาพ 15: กราฟต้นกล้วย $B(m, 2)$

ได้เซตครอบงำที่เล็กที่สุดของกราฟ G จะมีสมาชิกทั้งหมด m ตัว และจำนวนครอบงำของ G คือ m นั่นคือ $\gamma(G) = m$

<u>กรณีที่ 3</u> ให้ $G \cong B(m, n)$ ที่ $n \geq 3$ ให้ A_i เป็นกราฟดาว โดยที่ $1 \leq i \leq m$ และ v_i เป็นจุดศูนย์กลางของกราฟดาว A_i

สำหรับกราฟ G ถ้าสร้างเซตที่ประกอบด้วยจุดศูนย์กลาง $v_1, v_2, ..., v_m$ และรากเดี่ยว v จุดทุกจุดในกราฟ G จะถูกครอบงำ ดังนั้นเซตดังกล่าวจะเป็นเซตครอบงำ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกในเซตเท่ากับ $m + 1$

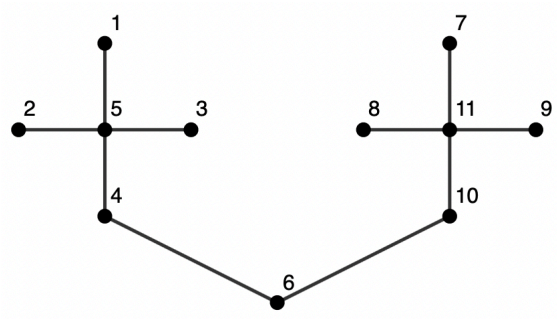
สมมติให้เซตครอบงำของกราฟ G มีสมาชิกเท่ากับ m และมองว่าจุดในกราฟถูกแบ่งออกเป็น $m + 1$ ส่วน โดยที่ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ เซต S_i ประกอบด้วยจุดทุกจุดในกราฟดาว A_i และ S_{m+1} ประกอบด้วยจุด v แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี

กรณี 1) มี i ที่จุดทุกจุดใน S_i ไม่อยู่ในเซตครอบงำ จะทำให้จุดศูนย์กลาง v_i ไม่ถูกครอบงำ ดังนั้นกรณีนี้จึงไม่เกิดขึ้น

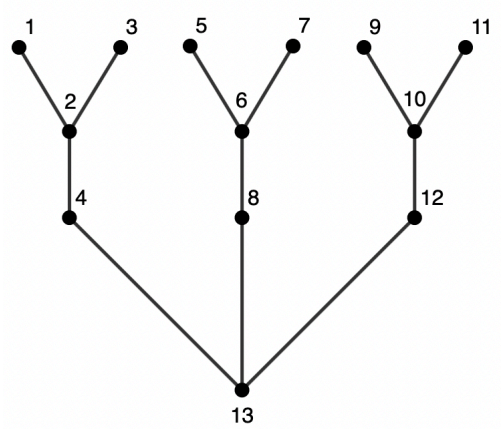
กรณี 2) จุด v ไม่อยู่ในเซตครอบงำ ดังนั้นจุดแบบเพนแดนต์ที่เชื่อมกับจุด v ใน S_i สำหรับ i ค่าหนึ่งจะต้องอยู่ในเซตครอบงำ จุดแบบเพนแดนต์จุดอื่นใน S_i เซตนั้นไม่ถูกครอบงำโดยจุดนี้ ทำให้ต้องเลือกจุดจากเซตนี้มาอยู่ในเซตครอบครอบงำเพิ่ม จึงมีอย่างน้อย 2 จุดใน S_i เซตนั้นอยู่ในเซตครอบงำ ทำให้เหลือจุดในเซตครอบงำอย่างมาก $m - 2$ จุด และเหลือ S_i แค่ $m - 1$ ส่วน จะมี S_i หนึ่งส่วนที่ไม่มีจุดอยู่ในนั้น ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งเช่นเดียวกับ **กรณี 1)**

ดังนั้นเซตครอบงำที่เล็กที่สุดมีสมาชิกเท่ากับ $m + 1$ นั่นคือ $\gamma(G) = m + 1$ $\square$

ตัวอย่าง 2.3.4 จำนวนครอบงำของกราฟต้นกล้วย $B(2,5)$ และ $B(3,4)$ และตัวอย่างของเซตครอบงำ



รูปภาพ 16: กราฟต้นกล้วย $B(2,5)$ $D = \{5, 6, 11\}$ และ $\gamma(B(2,5)) = 3$



รูปภาพ 17: กราฟต้นกล้วย $B(3,4)$ $D = \{2, 6, 10, 13\}$ และ $\gamma(B(3,4)) = 4$

ทฤษฎีบท 2.3.5 จำนวนครอบงำของกราฟต้นมะพร้าว $CT(m,n)$ คือ $\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$ เมื่อ $m \geq 1$ และ $n \geq 1$

บทพิสูจน์ : ให้ $G \cong CT(m,n)$ เป็นกราฟต้นมะพร้าว จากบทนิยามของกราฟต้นมะพร้าว ให้กราฟวิถี P_m ประกอบด้วยจุด $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ จะได้ว่ากราฟ G เกิดจากการเชื่อมจุดระดับขั้น 0 จำนวน n จุด ให้ชื่อว่าจุด $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ เข้ากับจุดปลาย v_1 ของกราฟวิถี P_m จะได้ว่า G มีจุด $m+n$ จุด และเส้น $m+(n-1)$ เส้น และจุด $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ จะเป็นจุดแบบเพนแดนต์

ในกรณีที่ $m = 1$ และ $m = 2$ กราฟ G จะเป็นกราฟดาว สมมติให้ v_1 อยู่ในเซตครอบงำ เนื่องจากในกราฟ G จุด v_1 จะครอบงำจุดแบบเพนแดนต์ทุกจุดที่เชื่อมกับ v_1 เราจะได้เซตครอบงำที่มีจำนวนจุดทั้งหมดคือ 1 ดังนั้น $\gamma(G) = 1$ เนื่องจากเมื่อ $m = 1$ หรือ $m = 2$ จะได้ว่า $\left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil = 0$ ดังนั้น $\gamma(G) = \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil + 1$

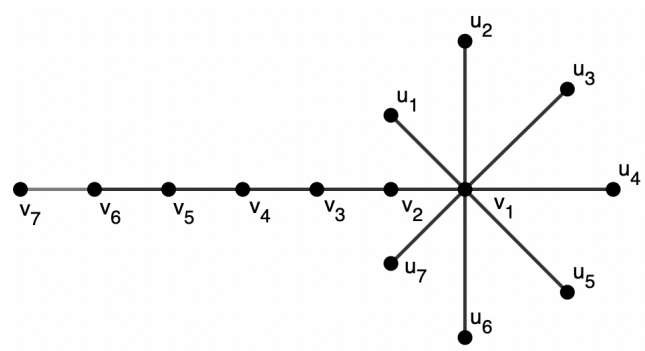
ต่อไปจะแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณี

<u>กรณี $n = 1$</u> กราฟ G จะเป็นกราฟวิถี P_{m+1} จากบทตั้ง 2.2.23 และบทตั้ง 2.2.24 จะได้ว่า $\gamma(G) = \left\lceil \frac{m+1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-2+3}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-2}{3} + \frac{3}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{m-2}{3} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil + 1$

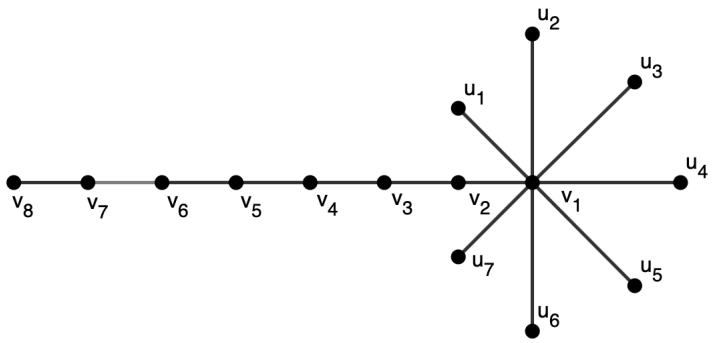
<u>กรณี $n \geq 2$</u> สมมติให้ v_1 อยู่ในเซตครอบงำ เนื่องจากในกราฟ G จุด v_1 จะครอบงำทุกจุดแบบเพนแดนต์ที่เชื่อมกับ v_1 และครอบงำจุด v_2 ทำให้กราฟวิถี P_m เหลือจำนวนจุดที่ยังไม่ถูกครอบงำเพียง $m-2$ จุด จากบทตั้ง 2.2.24 เราสามารถครอบงำจุด $m-2$ จุด ในกราฟวิถี P_m โดยใช้จุดเพียง $\gamma(P_{m-2}) = \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$ จุด ดังนั้นเราจะได้เซตครอบงำที่มีจำนวนจุด คือ $1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$

เราสามารถแสดงได้ว่าเซตครอบงำใด ๆ จะมีจุดอย่างน้อย $\left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil + 1$ จุด โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ นั่นคือ $\gamma(G) = \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil + 1$ $\square$

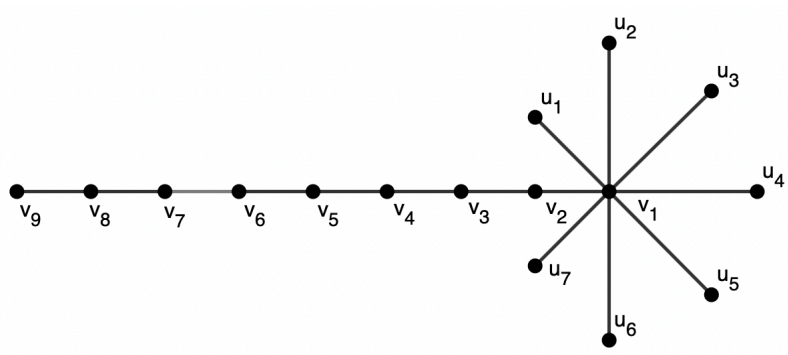
ตัวอย่าง 2.3.6 จำนวนครอบงำของกราฟต้นมะพร้าว $CT(7,7)$ $CT(8,7)$ และ $CT(9,7)$ และตัวอย่างของเซตครอบงำ



รูปภาพ 18: $D = \{v_1, v_4, v_7\}$ และ $\gamma(CT(7,7)) = 3$



รูปภาพ 19: $D = \{v_1, v_4, v_7\}$ และ $\gamma(CT(8,7)) = 3$



รูปภาพ 20: $D = \{v_1, v_4, v_7, v_9\}$ และ $\gamma(CT(9,7)) = 4$

2.4. สรุปผลการศึกษา

ทฤษฎีการครอบงำมีบทบาทสำคัญ และนักวิจัยหลายท่านได้ผลิตงานวิจัยในหัวข้อนี้ออกมาเป็นจำนวนมาก แนวคิดเรื่องการครอบงำได้ขยายไปสู่เซตครอบงำแบบ equitable และ end equitable ในงานวิจัยฉบับนี้ได้แสดงการหาเซตครอบงำและจำนวนครอบงำของกราฟบางประเภท ได้แก่ กราฟต้นกล้วย $B(m,n)$ กราฟต้นมะพร้าว $CT(m,n)$ และกราฟประทัด $F(m,n)$

3. เอกสารอ้างอิง

[1] Berge C., Theory of Graphs and its Applications, Dunod, Paris, 1958.

[2] Berge C., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] Bollob'as B., and Cockayne E. J., Graph-theoretic Parameters Concerning Domination Independence and Irredundance, Journal Graph Theory, 1979; 3: 241-249.

[4] Chartrand G., and Lesniak L., Graphs and Digraphs, fourth ed., CRC Press, Boca Raton, 2005.

[5] Cockayne E., and Hedetniemi S., Towards a Theory of Domination in Graphs, Networks Fall, 1977; 247-261.

[6] Fink J. F., Jacobson M. S., Kinch L. F., and Roberts J., The Bondage Number of a Graph, Discrete Mathematics, 1990; 86: 47-57.

[7] Haynes T. W., Hedetniemi S. T., and Slater P. J., Fundamentals of Domination in Graphs, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[8] Niranjan U., Subramanyam R. B. V., Khanaa V., Developing a Web Recommendation System Based on Closed Sequential Patterns, Communications in Computer and Information Science, 2010; 1010: 171-179.

[9] Ore O., Theory of Graphs, American Mathematical Society Colloquium Publications, Rhode Island, 1962.

[10] Zmazek B., and Zerovnik J., On Domination Numbers of Graphs Bundles, Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, 2005; 43: 1-10.

[11] วรรณศิริ วรรณสิทธิ์, เอกสารประกอบวิชาทฤษฎีกราฟ., ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, (2020)

[12] ปิยฉัตร ศรีประทักษ์, เอกสารประกอบวิชาวิยุตคณิต., ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, (2019)